

有理系数整数线性规划的模式化算法

龚金双* 李宗元**

摘 要: 给出了有理系数整数线性规划的新的改进算法,称为模式化算法。其特点是:首先将此类规划变换(模式化)为一种特殊类型,然后利用其特殊结构建立改进算法。其综合了分枝定界法与割平面法,减少了分枝次数,简化了割平面的技巧。

关键词: 整数线性规划, 模式化, 自然割平面

The Modelling Algorithm of Solving Integer Linear Programming of the Rational Coefficients

Gong Jinshuang* Li Zongyuan**

ABSTRACT: A new algorithm of solving integer linear programming is introduced in which the coefficients of the objective function are rational. This algorithm is called the modelling algorithm. In this algorithm, first of all, it can transform (ILP) into a special programming, then solve the special programming using a kind of special algorithm. The basic ideas of the algorithm is due to concentrating of the branch-bound and the cutting-plane, but it decreases the number of the branch and simplifies the technique of the cutting-plane.

KEY WORDS: integer linear programming, modelling algorithm, natural cutting-plane

1990-05-04收稿

* 北京石油管理学院

** 数力系(Department Of Mathematics and Mechanics)

近年来,在传统的分枝定界法与割平面法^[1]的基础上,陆续产生了许多改进算法。本文对如下的有理系数整数线性规划(RIP)提出了一种新的改进算法,称之为模式化算法:

$$\begin{aligned} & \text{Min } C^T x \\ \text{(RIP)} \quad & \begin{cases} Ax \leq b \\ x_j \text{ 取整数} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $C^T = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ C_j 为有理数 $j=1, 2, \dots, n$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

A 为 $m \times n$ 矩阵

此算法的基本构思是:通过变换将(RIP)化为一种特殊形式的整数线性规划(MIP)

$$\begin{aligned} & \text{Min } C_i y_i \\ \text{(MIP)} \quad & \begin{cases} \bar{B} y \leq \bar{b} \\ y_j \text{ 为整数} \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

其中, C_i 为 C 的某一分量,不失一般性,可假定 $C_i > 0$; $\bar{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\bar{B}$ 与 A 的关系见定理 1; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 。

然后,建立求解具有特殊结构的(MIP)的算法。值得注意的是,由于在计算机上求解一般整数线性规划时,如遇到无理数,均用有理数来近似。所以,本文的方法实际使用范围相当广泛。

1 (RIP)到(MIP)的模式化变换

定理 1:任何目标函数系数为有理数的纯整数线性规划都可以化为(2)形式的整数线性规划。

证明:在(1)形式的(RIP)中,由于 C_j 都是有理数($j=1, 2, \dots, n$),所以存在整数 $w > 0$,使得 $C^T = \frac{1}{w} (C'_1, C'_2, \dots, C'_n)$, 其中 C'_j ($j=1, 2, \dots, n$) 均为整数,因而可设 C_j 均为整数。

(1) 如果存在 $i, 1 \leq i \leq n$, 使得 $C_i | C_j \quad j=1, 2, \dots, n$, 则作变换:

$$\begin{cases} y_j = x_j & j \neq i \\ y_i = \frac{1}{C_i} C^T x \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{即 } y = Bx \quad (4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{C_1}{C_i} & \frac{C_2}{C_i} & \frac{C_3}{C_i} & \dots & \frac{C_n}{C_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{--- } i \text{ 行} \quad (5)$$

易知, B 满秩, 其逆变换为:

$$\begin{cases} x_j = y_j & j \neq i \\ x_i = y_i - \sum_{j \neq i} \frac{C_j}{C_i} y_j \end{cases} \quad (6)$$

或 $x = B^{-1}y$ (7)

这里

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -\frac{C_1}{C_i} & -\frac{C_2}{C_i} & -\frac{C_3}{C_i} & \cdots & 1 & \cdots -\frac{C_n}{C_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{--- } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{\scriptsize } i \text{ 列} \end{matrix} \quad (8)$$

由(3), (6)可知: x 是整向量 $\Leftrightarrow y$ 是整向量, 将(7)代入(1)得(MIP):

$$(MIP) \begin{cases} \text{Min } C_i y_i \\ \overline{B}y \leq b \\ y_j \text{ 是整数} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

这里, $\overline{B} = AB^{-1}$

(2) 如果不存在 $i, 1 \leq i \leq n$, 使得 $C_i | C_j, j = 1, 2, \dots, n$, 则假设 $|C_i| = \min_{C_j \neq 0} \{|C_j|\}$,

令整数 q_j 及 r_j 满足

$$C_j = q_j C_i + r_j, \quad 0 \leq r_j < |C_i| \quad j \neq i \quad (9)$$

将(9)代入(1), 可得:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{j \neq i} (q_j C_i + r_j) x_j + C_i x_i \\ & \begin{cases} Ax \leq b \\ x_j \text{ 为整数} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

作变换:

$$\begin{cases} x'_j = x_j & j \neq i \\ x'_i = \sum_{j \neq i} q_j x_j + x_i \end{cases} \quad (11)$$

其逆变换为:

$$\begin{cases} x_j = x'_j & j \neq i \\ x_i = x'_i - \sum_{j \neq i} q_j x'_j \end{cases} \quad (12)$$

由(11), (12)知: x_j 是整数 $\Leftrightarrow x'_j$ 是整数, $j = 1, 2, \dots, n$, 将(12)代入(10), 可得:

$$\begin{aligned} & \text{Min } C_i x'_i + \sum_{j \neq i} r_j x'_j \\ & \begin{cases} A_1 x' \leq b \\ x'_j \text{ 为整数, } j=1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

这里,

$$A_1 = AB_1^{-1} \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & \cdots & 1 & \cdots & -q_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{--- } i \text{ 行} \\ \\ \\ | \\ i \text{ 列} \end{array}$$

此时 $|r_i| < |C_i| \quad j \neq i$

故每进行一次这样的变换, 目标函数中, 非零的绝对值最小的系数至少下降 1, 故经若干次这样的变换, 必能化为情况(1), 定理证毕。

2 模式化算法

模式化算法, 下面以 2^* 表示

step 1 求解(2)的松弛问题

$$\begin{aligned} & \text{Min } C_i y_i \\ & \overline{B}y \leq b \end{aligned} \quad (14)$$

如果(14)无解, 则(2)无解, 停;

如果(14)有最优解 $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^T$

若 $y_j^* (j=1, 2, \dots, n)$ 皆为整数, 则 y^* 为(2)的最优解, 停;

若 y^* 不为整数, 则给定目标函数的初始上界 $M := +\infty$, 下界 m :

$$m := \begin{cases} C_i y_j^* & y_j^* \text{ 为整数} \\ C_i (\lfloor y_j^* \rfloor + 1) & y_j^* \text{ 非整数} \end{cases} \quad \text{转 step 2}$$

step 2 分枝

(1) 若 y_i^* 是整数, 且存在 $j \neq i$ y_j^* 不是整数, 则将相应的整数规划分枝, 在两个分枝规划上分别加上约束 $y_j \leq \lfloor y_j^* \rfloor$; $y_j \geq \lfloor y_j^* \rfloor + 1$;

(2) 若 y_i^* 不是整数, 且存在 $j \neq i$, y_j^* 不是整数, 则在两个分枝规划上分别加上约束 $y_j \leq \lfloor y_j^* \rfloor$; $y_j \geq \lfloor y_j^* \rfloor + 1$; $y_i \geq \lfloor y_i^* \rfloor + 1$;

(3) 若 y_i^* 不是整数, $y_j^* \quad j \neq i$ 均为整数, 则在相应整数规划上加上约束 $y_i \geq \lfloor y_i^* \rfloor + 1$, 仅得一个分枝规划。

step 3 求解分枝整数规划的松弛问题

如果无解, 则进行 step 4

如果得到非整数解 $y^* = [y_1^*, \dots, y_n^*]^T$

$$\text{若 } \begin{cases} C_i y_i^* > M & y_i^* \text{ 是整数} \\ C_i ([y_i^*] + 1) > M & y_i^* \text{ 不是整数} \end{cases}$$

则进行 step 4 否则, 转 step 2

如果得到整数解 $y^* = (y_1^* \dots y_n^*)^T$

若 $C_i y_i^* > M$, 则进行 step 4

若 $C_i y_i^* \leq M$, 记录此解 y^* , 且令 $M := C_i y_i^*$

当 $M > m$ 时, 进行 step 4

当 $M = m$ 时, 进行 step 5

step 4 检查是否存在尚未考虑的分枝, 若存在, 则转 step 3; 否则, 进行 step 5;

step 5 终止步

如果 $M = +\infty$, 则(2)无解

如果 $M < +\infty$, 则 M 为(2)的最优值, 其对应的整数解为(2)的最优解。

3 自然割平面法

与传统的分枝定界法相比, 算法2*在某些分枝规划中增加了约束 $y_i \geq [y_i^*]$ 。本文将它称为自然割平面, 因为它类似于作了一次切割。但它比 Gomory 的割平面简单可靠, 并且无需高的技巧性。本节定理将表明, 由于引入自然割平面, 一般说来将减少分枝次数。

为讨论及叙述的方便, 引入下列记号:

(MIP₀)——表示求解(2)时的某个分枝整数线性规划 (也可以是(MIP)) ;

(MIP₁)、(MIP₂)——分别表示(MIP₀)增加 $y_i \geq [y_i^*] + 1$, $y_i \leq [y_i^*]$ 所得的分枝整数线性规划。

(MIP'₀)——(MIP₀)的前一级分枝整数线性规划 (但(MIP₀)为(MIP)的情况除外)。

定理2 如果整数线性规划(MIP)有最优解, 且所有最优解为其松弛问题(3)的可行域的内点, 则用传统的分枝定界法求解时, 必须进行一次 $y_i \geq [y_i^*] + 1$; $y_i \leq [y_i^*]$ 的分枝过程, 即必须求解(MIP₁)、(MIP₂)型的两个分枝规划。

证明: 反证法。假设不经过 $y_i > [y_i^*] + 1$; $y_i \leq [y_i^*]$ 的分枝过程, 即不求解(MIP₁), (MIP₂)便可得到(MIP)的最优解。即存在(MIP'), 它是(MIP)增加一些关于 $y_i (i \neq i)$ 的约束得出的, 且其松弛问题的最优解 $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ 是(MIP)的最优解。

从而, 由假设条件知, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $y' = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_i - \varepsilon, \dots, \bar{y}_n)$ 是(MIP')的松弛问题的可行解。又注意到 $\bar{y}_i (i \neq i)$ 满足(MIP')中关于 $y_i (i \neq i)$ 的分枝不等式约束, 但(MIP')中没有关于 y_i 的分枝不等式约束, 所以, y' 是(MIP')的松弛问题的可行解。但 $C_i (\bar{y}_i - \varepsilon) < C_i \bar{y}_i$, 这与 $\bar{y}$ 是(MIP')的松弛问题的最优解矛盾, 定理证毕。

定义: (C_i 缓慢下降)。若 (MIP'₀) 与 (MIP₁) 对应的两个松弛问题最优值之差小于 C_i 时, 称为 C_i 缓慢下降。

定理3: 用算法2*求解(MIP)时, 不存在 C_i 缓慢下降的(MIP'₀), (MIP₁)。

证明: 由算法2*及(MIP'₀), (MIP₀), (MIP₁)的意义知, 产生(MIP'₀)与产生(MIP₁)

的分枝过程是同时进行的,即使用算法2*时,(MIP₀)与(MIP₁)合并为同一个分枝规划。证毕。

结 论

用模拟化算法求解,可直接舍掉无解的(MIP₂)并将(MIP₀)与(MIP₁)合并为一。又鉴于传统的分枝定界法中成对出现 C_i 缓慢下降的(MIP₀)与(MIP₁),所以,模拟化算法求解(MIP)时,常常成对减少分枝,从而减少了计算量。

参 考 文 献

- 1 Land A H, Powell S. A Survey of Available Computer Codes to Solve Integer Linear Programming Problems, Research Report, 81—09 LSEPS. London, 1981

内凸筋管的成型研究

我国于80年代初引进美国 C.E 公司火力发电锅炉技术后,高效能的内凸筋管(简称 R.T 管),急需国内试制供应。一台 30×10^4 kW 火力发电锅炉需用钢管数量2100t,其中 R.T 管占14.6%。此外制冷设备等均需这类无缝钢管。电站锅炉上使用 R.T 管,可以节能、节材和提高锅炉设备的使用安全,因而国外广泛地研究了此管的成型技术,并获得多项专利。北京科技大学依据国内现有生产水平,首先在实验室中用冷拔方法生产出了样品,掌握了成型机理、工具设计、拔制条件等规律后,于1987~1989年与衡阳钢管厂合作进行了4次工业性试验,拔出了工业应用的 R.T 管。

通过理论和实践研究,得出拔制 R.T 管的技术关键是:

- (1) 正确选择减壁量和减径量来获得足够高的凸筋高度;
- (2) 减小内模旋转阻力,保证凸筋质量,使之凸筋侧边不刮伤和畸变;
- (3) 建立理论的内模沟槽曲线方程;
- (4) 选择合理的拔制条件是稳产高产的前提;
- (5) 内模沟槽曲线用折线逼近方法加工,加工费只有原来的1/50,提高了经济效益。