DOI:10.13374/j.issn1001-053x.2008.09.017
第30卷 第9期 北 京 科 技 大 学 学 报 Vol.30 No.9
2008年 9月 Journal of University of Science and Technology Beijing Sep. 2008

时变不确定性机械设计方法

石博强 闫永业 范慧芳 赵德祥

北京科技大学土木与环境学院,北京 100083

摘 要 针对机械零件的应力和强度在不确定因素作用下的时变性,基于含有时变和随机因素的时变可靠度计算模型,提出了包含时变和随机因素的时变不确定性机械设计方法.该方法以当前时刻为时间分析起点,不但考虑应力和强度受到随机因素的影响,而且考虑了在某一时刻 t 应力和强度的分布,讨论了其求解方法.该方法是基于时变可靠度计算模型的时变概率设计方法,它同样可以应用于其他领域如结构工程领域.

关键词 机械设计方法;时变;不确定性;应力;强度

分类号 TH122

Mechanical design method with uncertain evolution

SHI Boqiang, YAN Yongye, FAN Huifang, ZHAO Dexiang

School of Civil and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

ABSTRACT Aimed to the time variations of machine parts' stress and strength, a time-dependent mechanical design method, in which time-variable and random factors were taken into account, was proposed on the base of the calculation method of reliability incorporating time varying and uncertainty. The proposed method was analyzed using present time as the starting point. Stress and strength were considered to be affected by random factors. Also, the distributions of stress and strength at any time t were modeled. A solution to the calculation method was given. Although the method is based on the time-dependent reliability model, it can be applied to other fields such as structural engineering.

KEY WORDS mechanical design method; time varying; uncertainty; stress; strength

机械零件的使用寿命是机械设计中一项重要的设计指标,在机械零件的使用过程中总是会受到包括外在环境、材料自身等方面的不确定因素的影响.目前,国内外的专家、学者已对产品在使用过程中受到的不确定因素的影响进行了大量研究[1-3].

传统的机械设计方法认为零件的强度 S 和应力 σ 都是单值的,因此安全系数 $n=S/\sigma$ 也是单值的,只要安全系数大于某一根据实际使用经验规定的数值,就认为零件是安全的[4].该设计方法不能回答所涉及产品的可靠程度或发生故障概率是多少的问题.

当前,人们所采用的概率机械设计方法认为机械零部件的应力、强度是多值的,呈一定的分布状态[5].一般设强度分布和应力分布是正态分布,对于同样大小的强度均值和应力均值,其平均安全系数值完全一样.该方法考虑了机械材料特性与机械构件的工作载荷条件及其破坏过程的随机性,使得机械零件是否安全或失效,不仅取决于平均安全系数的大小,还取决于强度分布和应力分布的离散程度,即根据强度和应力分布的标准差大小而定.该方法更加符合机械工程的具体实践,目前得到广泛应用[6-11].但是,在此概率设计方法中应力和强度的分布针对的是在一段时间内的分布,而不是针对某一时刻应力和强度的分布进行可靠性设计.而实际中,由于不确定性因素广泛地存在于机械设备及其工作环境中,这些时变不确定因素造成了应力和强度的时变性.因此,概率设计方法中没有体现出应力和强度随着时间的变化.

收稿日期:2007-07-25 **修回日期**:2007-09-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.50475173)

作者简介:石博强(1962-),男,教授,博士生导师,E-mail:yanyongye@tom.com

1　可靠度计算数学模型

设(Ω, F, P)是一个概率空间，F 为 Ω 上的 σ 代数，P 为 Ω 上的一个概率测度，$\{W(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$为一维标准布朗运动，$t$ 为时间变量. 假如，随机变量 X 满足：

$$\mathrm{d}X(t)=\lambda X(t)\mathrm{d}t+\delta X(t)\mathrm{d}W(t),\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{1}$$

式中，λ 和 δ 为常系数. 因而

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{X(t)}=\lambda\mathrm{d}t+\delta\mathrm{d}W(t) \tag{2}$$

根据 Ito 定理有：

$$\ln X(t)-\ln X(0)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}X}{X}+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{-1}{X^2}\delta^2X^2\mathrm{d}u \tag{3}$$

式中，X 为随机变量，u 为时间变量.

令 $Y(t)=\ln X(t)$，$Y(t)$为 $X(t)$的函数，把式(1)代入式(3)可得：

$$Y(t)=Y(0)+\int_0^t\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)\mathrm{d}u+\int_0^t\delta\mathrm{d}W_u \tag{4}$$

因为

$$\int_0^t\mathrm{d}u=t,\ \int_0^t\mathrm{d}W_u=W_t-W_0,\ W_0=0,$$

故

$$Y(t)=\ln X(0)+\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t+\delta W(t) \tag{5}$$

式中，W_0 为运动时间为零的布朗运动，W_t 为运动时间为 t 布朗运动.

对 $Y(t)$作指数运算得到式(1)的解：

$$X(t)=X(0)\exp\left[\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t+\delta W(t)\right] \tag{6}$$

而 $\ln X(t)$的数学期望是：

$$\mathrm{E}(\ln X(t))=\mathrm{E}\left[\ln X(0)+\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t+\delta W(t)\right]=\ln X(0)+\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t \tag{7}$$

根据式(6)可知：

$$\ln(\mathrm{E}(X(t)))=\ln\left\{\mathrm{E}\left[X(0)e^{\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t+\delta W(t)}\right]\right\}=\ln X(0)+\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t+\frac{\delta\sqrt{t}}{2} \tag{8}$$

根据期望的对数和对数的期望值之间关系

$$\ln(\mathrm{E}(X))=\mathrm{E}(\ln X)+\frac{1}{2}D(\ln X) \tag{9}$$

式中，D 为标准差.

将式(7)和(8)代入式(9)，得 $\ln X(t)$的标准差为：

$$D(\ln X(t))=\delta\sqrt{t}$$

故 $\ln X(t)$是一个均值为 $\ln X(0)+(\lambda-\delta^2/2)t$、标准差为 $\delta\sqrt{t}$的正态分布函数，即

$$\ln X(t)\sim N\left[\ln X(0)+\left(\lambda-\frac{1}{2}\delta^2\right)t,\ \delta\sqrt{t}\right] \tag{10}$$

假设强度和应力的对数 $\ln S(t)$和 $\ln\sigma(t)$是相互独立的随机变量，均值和标准差分别为$(\mu_{\ln S(t)}, \hat{\sigma}_{\ln S(t)})$和$(\mu_{\ln\sigma(t)}, \hat{\sigma}_{\ln\sigma(t)})$，由于实际中的应力(强度)受到确定性因素和不确定性因素的共同作用，确定性因素反映了应力(强度)的变化趋势，不确定性因素反映了应力(强度)的随机差异，二者的耦合行为对应力(强度)产生的效应以概率演化出现，因此本文假设应力和强度服从式(1)，即 $\sigma(t)$和 $S(t)$满足：

$$\mathrm{d}\sigma(t)=\lambda_\sigma\sigma(t)\mathrm{d}t+\delta_\sigma\sigma(t)\mathrm{d}W(t),\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{11}$$

$$\mathrm{d}S(t)=\lambda_S S(t)\mathrm{d}t+\delta_S S(t)\mathrm{d}W(t),\ 0\leqslant t\leqslant T \tag{12}$$

式中，系数 λ_σ 为应力的漂移率，λ_S 为强度的漂移率，δ_σ 为应力的波动率，δ_S 为强度的波动率.

由式(6)知：

$$\sigma(t)=\sigma(0)\exp\left[\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)t+\delta_\sigma W(t)\right] \tag{13}$$

$$S(t)=S(0)\exp\left[\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)t+\delta_S W(t)\right] \tag{14}$$

因此 $\ln S(t)$是一个正态分布：

$$\ln S(t)\sim N\left[\ln S(0)+\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)t,\ \delta_S\sqrt{t}\right] \tag{15}$$

$\ln S(t)$的均值和方差分别是：

$$\mu_{\ln S(t)}=\ln S(0)+\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)t,\ \hat{\sigma}_{\ln S(t)}=\delta_S\sqrt{t}.$$

$\ln\sigma(t)$也是一个正态分布：

$$\ln(\sigma(t))\sim N\left[\ln(\sigma(0))+\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)t,\ \delta_\sigma\sqrt{t}\right] \tag{16}$$

$\ln\sigma(t)$的均值和方差分别是：

$$\mu_{\ln\sigma(t)}=\ln\sigma(0)+\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)t,\ \hat{\sigma}_{\ln\sigma(t)}=\delta_\sigma\sqrt{t}.$$

令 $Z_R=\ln S-\ln\sigma$，由于机构的可靠度可以用以下概率表示：

$$R=P(Z_R>0),\ R(t)=P(Z_{R(t)}>0),$$

故

$$R(t)=P(\ln S(t)-\ln\sigma(t)>0)=P(\ln S(t)>\ln\sigma(t)).$$

由于 $\ln S(t)$ 和 $\ln\sigma(t)$ 相互独立，且分别服从正态分布，故 $Z_{R(t)}=\ln S(t)-\ln\sigma(t)$ 也服从正态分布，其均值为：

$$\mu_{Z_R(t)}=\mu_{\ln S(t)}-\mu_{\ln\sigma(t)} \tag{17}$$

标准差为：

$$\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}=\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}. \tag{18}$$

Z_R 的概率密度函数是：

$$\varphi(Z_{R(t)})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}}\exp\left[\frac{-(Z_{R(t)}-\mu_{Z_{R(t)}})^2}{2\hat{\sigma}^2_{Z_{R(t)}}}\right] \tag{19}$$

其中：

$$Z_{R(t)}=\ln S(t)-\ln\sigma(t).$$

令

$$v=\frac{Z_{R(t)}-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}} \tag{20}$$

变量 $Z_{R(t)}$ 的极限是：当 $Z_{R(t)}=\infty$，

$$\nu=\frac{Z_{R(t)}-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}}=\frac{\infty-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}}=\infty;$$

当 $Z_{R(t)}=0$，

$$\nu=\frac{Z_{R(t)}-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}}=\frac{0-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}}=\frac{-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}};$$

令 $Z_{\alpha(t)}=\dfrac{-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(0)}}}$，故可靠度

$$R(t)=\mathrm{P}(Z_{R(t)}>0)=\mathrm{P}(\ln S(t)-\ln\sigma(t)>0)=\int_0^\infty\varphi(Z_{R(t)})\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{Z_{\alpha(t)}}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\nu^2}{2}}\mathrm{d}\nu \tag{21}$$

由式(18)和式(17)得：

$$Z_{\alpha(t)}=\frac{-\mu_{Z_{R(t)}}}{\hat{\sigma}_{Z_{R(t)}}}-\frac{\mu_{\ln S(t)}-\mu_{\ln\sigma(t)}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}} \tag{22}$$

可靠度

$$R(t)=\Phi(-Z_{\alpha(t)}) \tag{23}$$

其中 $\Phi(Z_{R(t)})$ 为变量 $Z_{R(t)}$ 的分布函数：

$$\Phi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u.$$

2 设计方法

假设对零件的要求是 1 a 以后的可靠度是 $R(t)$，应力和强度是独立的随机变量，已知 $(\lambda_\sigma,\delta_\sigma)$ 和 (λ_S,δ_S)，可以求出设计参数 $R(0)$ 与 $S(0)$ 之间的关系.

由于可靠度是 $R(t)$ 已知，由式(23)可得 $Z_{R(t)}$，又

$$\mu_{\ln S(t)}-\mu_{\ln\sigma(t)}=-Z_{\alpha(t)}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}},$$

其中 $\hat{\sigma}_{\ln S(t)}=\delta_S\sqrt{t}$，$\hat{\sigma}_{\ln\sigma(t)}=\delta_\sigma\sqrt{t}$，故 $\mu_{R(t)}-\mu_{S(t)}$ 可以求出. 由式(15)和(16)可知：

$$\mu_{\ln S(t)}=\ln S(0)+\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)t,$$

$$\mu_{\ln\sigma(t)}=\ln\sigma(0)+\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)t.$$

因而

$$\mu_{\ln S(t)}-\mu_{\ln\sigma(t)}=\left[\ln S(0)+\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)t\right]-\left[\ln\sigma(0)+\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)t\right]=(\ln S(0)-\ln\sigma(0))-\left[\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)-\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)\right]t,$$

$$\ln S(0)-\ln\sigma(0)=(\mu_{\ln S(t)}-\mu_{\ln\sigma(t)}+\left[\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)-\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)\right]t=-Z_{\alpha(t)}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}+\left[\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)-\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)\right]t.$$

故

$$\ln\left(\frac{S(0)}{\sigma(0)}\right)=-Z_{\alpha(t)}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}+\left[\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)-\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)\right]t,$$

$$\frac{S(0)}{\sigma(0)}=\exp\left\{-Z_{\alpha(t)}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}+\left[\left(\lambda_S-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)-\left(\lambda_\sigma-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)\right]t\right\} \tag{24}$$

式中，λ_σ、δ_σ、λ_S、δ_S 和 t 均已知，故 $\dfrac{S(0)}{\sigma(0)}$ 可以求出，这样便可以选择不同的材料或者材料尺寸对零件进行设计.

3 参数的确定方法

漂移率 λ 反映确定性因素对应力(强度)变化率的影响权重，波动率 δ 反映不确定性因素对应力(强度)变化率的影响权重. 由于未来的漂移率和波动率还未发生，无法直接得到，因而 λ 和 δ 则以历史上受到随机因素影响时的漂移率和波动率作为未来漂移率和波动率的合理参考值.

3.1 漂移率 λ 的计算

X 在相同的时间间隔点(例如天、周或年)所得到的观测值，漂移率：

$$\lambda=\bar{q}=\frac{1}{n}\sum\ln\frac{X_j}{X_{j-1}} \tag{25}$$

式中，X_j 为第 j 个观测时间点的值（$j=1,\cdots,n,n+1$，观测次数为 $n+1$ 次）.

3.2　波动率 δ 的计算

令 $q_i=\ln\dfrac{X_j}{X_{j-1}}$，$i=1,2,\cdots,n$，$\bar{q}$ 是 q_i 的平均值，则

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(q_i-\bar{q})^2}.$$

即，

$$\delta=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(q_i-\bar{q})^2}{n-1}} \qquad (26)$$

4　两种特殊情况

(1) 当 $\delta_S=\delta_\sigma=0$ 时，应力(强度)变化率仅受到确定性因素的影响.

因为应力和强度都服从

$$\mathrm{d}X(t)=\lambda X(t)\mathrm{d}t+\delta X(t)\mathrm{d}W(t),$$

故

$$\mathrm{d}X(t)=\lambda X(t)\mathrm{d}t,\ X(t)=X(0)\exp\lambda t.$$

根据设计零件零时刻的强度 $R(0)$ 和应力 $S(0)$ 的关系为 $\dfrac{S(t)}{\sigma(t)}=\dfrac{S(0)}{\sigma(0)}\exp(\lambda_S-\lambda_\sigma)t$，便可以选择不同的材料或者材料尺寸对零件进行设计.

(2) 当 $\lambda_S=\lambda_\sigma=0$ 时，应力(强度)变化率仅受到不确定性因素的影响.

$$\mathrm{d}X(t)=\delta X(t)\mathrm{d}W(t),$$

$$\frac{S(0)}{\sigma(0)}=\exp\left\{-Z_{\alpha(t)}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}+\left[\left(0-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)-\left(0-\frac{1}{2}\delta_\sigma^2\right)\right]t\right\}=$$

$$\exp\left[-Z_{\alpha(t)}\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\ln S(t)}+\hat{\sigma}^2_{\ln\sigma(t)}}+\left(\frac{1}{2}\delta_\sigma^2-\frac{1}{2}\delta_S^2\right)t\right].$$

根据设计零件零时刻的强度 $R(0)$ 和应力 $S(0)$ 的关系，便可以选择不同的材料或者材料尺寸对零件进行设计.

5　算例

考虑一受拉圆轴(图 1)，假设应力在轴的横截面上均匀分布，轴线为直线，随机载荷作用在截面中心，破坏定为断裂. 设计准则为 $R(t)=P(\ln S(t)-\ln\sigma(t)>0)$.

强度和应力的 200 个历史观测数据如图 2 和图 3所示，该历史观测数据由软件 Labview 随机产生，假设观测的时间间隔以天为单位，设计使用寿命为 1 a，求可靠度分别为 $R(t)=0.995$ 和 $R(t)=0.95$，所使用材料的强度在零时刻 $S(0)=500$ MPa 时，求受拉圆轴的设计半径 r.

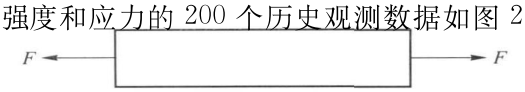

图 1　受拉轴

Fig.1　Tensional bar

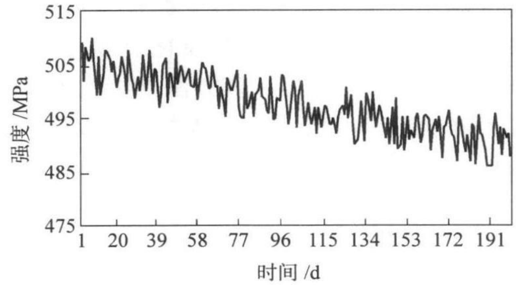

图 2　强度的历史数据

Fig.2　History data of strength

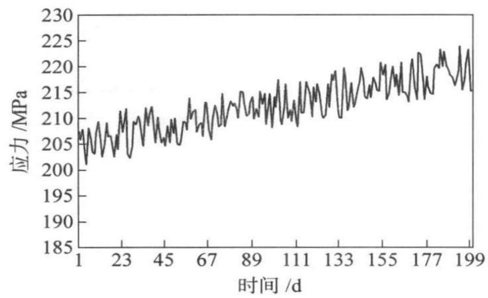

图 3　应力的历史数据

Fig.3　History data of stress

根据历史数据，由式(25)和(26)可得：

$$\lambda_s=-0.000\,210\,422\,656\,15,$$

$$\lambda_\sigma=0.000\,189\,214\,035\,84,$$

$$\delta_s=0.008\,338\,983\,708,\ \delta_\sigma=0.017\,688\,311\,331.$$

由式(23)可知 $R(t)=0.995$ 时，$Z_{\alpha(t)}=Z_{\alpha(365)}=-2.575$.

由式(24)可知

$$\frac{S(0)}{\sigma(0)}=\mathrm{e}^{0.8606}=2.3645,$$

$$\sigma(0)=\frac{S(0)}{2.3645}=\frac{500}{2.3645}=\frac{F(0)}{\pi r^2}=\frac{200\,000}{\pi r^2}.$$

解得 $r=17.3555$ mm. 即当 $r=17.3555$ mm 能够满足零件的可靠度在 1 a 后为 0.995 的要求.

同理，当 $R(t)=0.95$ 时，$Z_{\alpha(t)}=Z_{\alpha(365)}=1.645$.

$$\frac{S(0)}{\sigma(0)}=\mathrm{e}^{0.5131}=1.6705,$$

$$\sigma(0)=\frac{S(0)}{1.6705}=\frac{500}{1.6705}=\frac{F(0)}{\pi r^2}=\frac{200\,000}{\pi r^2}.$$

解得 $r=14.5878$ mm. 即当 $r=14.5878$ mm 时，能

够满足零件的可靠度在 1 a 后为 0.95 的要求.

6 结论

基于时变可靠度计算模型,提出了时变不确定性机械设计方法. 与传统机械设计方法相比,该不确定性机械设计方法体现了时变的特点,与零件在使用中强度和应力是随时间的演化过程相一致,是一种动态的机械设计方法. 该方法的特色在于:(1)考虑了不确定因素的影响;(2)考虑了强度和应力随时间的演化过程.

参 考 文 献

[1] Mocko G M, Paasch R. Incorporating uncertainty in diagnostic analysis of mechanical systems. *ASME J Mech Des*, 2005, 127(2): 315

[2] Marti K, Kaymaz I. Reliability analysis for elastoplastic mechanical structures under stochastic uncertainty. *Z Angew Math Mech*, 2006, 86(5): 358

[3] Tonon F. Using random set theory to propagate epistemic uncertainty through a mechanical system. *Reliab Eng Syst Saf*, 2004, 85(1/3): 169

[4] Collins J A. *Mechanical Design of Machine Elements and Machines: A Failure Prevention Perspective*. New York: John Wiley, 2003

[5] Haugen E B. *Probabilistic Mechanical Design*. New York: Wiley, 1980

[6] Wehenkel L, Lebrevelec C, Trotignon M, et al. Application of probabilistic design method to thermal performance design for straight blade stages of steam turbines. *Control Eng Pract*, 1999, 7(2): 183

[7] Fujisaki Y, Dabbene F, Tempo R. Probabilistic design of LPV control systems. *Automatica*, 2003, 39(8): 1323

[8] Shi J Y. Application of probabilistic design method to thermal performance design for straight blade stages of steam turbines. *Proc CSEE*, 1999, 19(2): 20
(史进渊. 概率设计法在汽轮机直叶片级热力设计中的应用. 中国电机工程学报, 1999,19(2): 20)

[9] Wen Y K. Reliability-based design under multiple loads. *Struct Saf*, 1993, 13(1/2): 3

[10] Wehenkel L, Lebrevelec C, Trotignon M, et al. Probabilistic design of power-system special stability controls. *Control Eng Pract*, 1999,7(2): 183

[11] Ravindra M K, Walser A. Probabilistic design of nuclear structures: a summary of state of the art and research needs. *Nucl Eng Des*, 1978,50(1): 115