

四维空间分形插值算法在品位估算中的应用

胡乃联,陈建均[✉],李国清,杨桦

北京科技大学土木与环境工程学院,北京 100083
✉ 通信作者, E-mail: cjj2012@sina.com

摘要 克里金法是一种应用广泛的低通滤波性插值方法,但其无法重建原始信息中的高频、低频和局部信息。分形插值算法可利用自相似性,在保留原始信息的基础上,克服克里金插值中低通滤波的局限性,从而提高插值的准确性。本文在传统分形插值算法的基础上,结合地质空间信息,提出了适用于矿床品位估算的四维空间分形插值算法,并将其应用于钼矿的品位估算。结果表明:在该钼矿的品位估算中,四维空间分形插值算法明显优于克里金法。

关键词 探矿; 品位估算; 插值算法; 分形; 均方误差
分类号 TD166

Application of a four-dimensional space fractal interpolation algorithm in grade estimation

HU Nai-lian, CHEN Jian-jun[✉], LI Guo-qing, YANG Hua

School of Civil and Environmental Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China
✉ Corresponding author, E-mail: cjj2012@sina.com

ABSTRACT Kriging interpolation is a widely used low-pass filter interpolation method, but it cannot reconstruct the high-frequency, low-frequency and partial information of original information. Fractal interpolation using self-similarity, which can retain original information, overcomes the limitations of Kriging interpolation low-pass filters, thereby improving the interpolation accuracy. On the basis of the traditional fractal interpolation algorithm and in combination with geological spatial information, this paper introduces a four-dimensional space fractal interpolation algorithm suitable for ore grade estimation. The interpolation algorithm is applied to molybdenum ore grade estimation and then compared with the Kriging interpolation algorithm. The results show that the interpolation algorithm is superior to the Kriging interpolation algorithm.

KEY WORDS mine exploration; grade estimation; interpolation algorithms; fractals; mean square error

由于勘探采样取得的钻孔品位数据有限,无法直接判断矿床的开采价值,因此寻求一种有效的品位插值方法对矿山项目投资十分重要。近年来,多维概率分布模型^[1]、支持向量机模型^[2-3]、克里金插值法等品位插值技术已应用于品位插值处理中,其中克里金插值法应用最为广泛。

克里金插值法是一种最佳线性无偏估算的方法,但它的求解过程决定了它是一个空间滑动平均或低通滤波过程,高频、局部与弱信息在相关系数矩

阵的方差中占的比重很小,这些信息很容易被压低或消除^[4]。

地质数据存在复杂性和不规则性;但大量研究表明,地质数据存在广泛的自相似性^[5],可以考虑将分形插值应用到地质品位估算的研究中。针对克里金插值法存在的低通滤波性,本文提出基于分形理论的四维空间分形插值算法,并将该方法应用于某钼矿的钻孔品位数据插值过程中,同时与克里金插值法进行了对比。

收稿日期: 2013-12-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51104010); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(FRF-SD-12-001A)

1 克里金插值法的低通滤波性

克里金插值法是一种最优无偏估量的储量计算方法, 它的插值公式为^[6]

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i). \quad (1)$$

式中 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为权重系数, $Z^*(x_0)$ 为估计值 $Z(x_i)$ 为已知值.

从克里金插值理论可以看出, 克里金插值法是利用空间自相关性, 在方差极小意义下估算待估点的属性值, 其实质是一种加权平均方法. 由于高频信号仅有较低的空间相关性, 对加权系数贡献较小, 造成高频信号损失较大, 因此克里金插值是一个明显的低通滤波过程^[4]. 为此, 本文提出了基于分形理论的四维空间分形插值算法, 试图解决克里金插值的低通滤波性.

2 分形插值原理和方法

分形是对事物的形状、形态、结构与组织的分解、分割与分析, 它具有自相似性^[7]. 自相似性是指局部与整体在形态、功能、信息等方面具有统计意义上的相似性^[8]. 分形插值是一种构造分形曲线的方法, 是由 Barnsley 在迭代函数系统基础上提出来的. 用分形插值可以得到相邻两插值点之间的局部变化特征, 从而使插值结果更加符合实际.

2.1 分形插值原理

对于给定的数据点 $\{(x_i, y_i); x_{i-1} < x_i, i=1, 2, \dots, N\}$, 定义二维欧氏空间中的仿射变换为 $w: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, 可构造迭代函数系统 (IFS): $\{ \mathbf{R}^2; w_i, i=1, 2, \dots, n \}$, 使得此迭代函数系统的吸引子等于插值函数 $f(x)$ 的图形. 设迭代函数系统中每个函数都是仿射变换, 其构造为

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

这时有集合函数 $L_i(x) = a_i x + e_i$, 插值函数 $F_i(x, y) = c_i x + d_i y + f_i$, 其中 a_i, c_i, d_i, e_i 和 f_i 为变换函数的系数.

该迭代函数系统的求取是通过拼贴完成的, 满足如下条件:

$$w_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix}, w_i \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i=1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

又由 $L_i(x_0) = x_{i-1}, L_i(x_n) = x_i, F_i(x_0, y_0) = y_{i-1}, F_i(x_n, y_n) = y_i$, 可得方程组:

$$\begin{cases} a_i x_0 + e_i = x_{i-1}, \\ a_i x_n + e_i = x_i, \\ c_i x_0 + d_i y_0 + f_i = y_{i-1}, \\ c_i x_n + d_i y_n + f_i = y_i. \end{cases} \quad (4)$$

这四个方程是由约束条件给出的. 可见, 每个变换 w_i 的系数中存在一个自由变量; 取 d_i 为自由变量, 并称之为垂直尺度因子. 限定自由变量 $0 \leq d_i < 1$. 因为变换 w_i 能够把每条与 y 平行的直线变换成另一条与 y 平行的直线. 所以, 选取 d_i 为自由变量, 就能指定由变换 w_i 所生成的垂直尺度. 令 d_i 为任意一个限定的实数, 则 w_i 其他的系数可以表示为

$$\begin{cases} a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0}, \\ e_i = \frac{x_n x_{i-1} - x_0 x_i}{x_n - x_0}, \\ c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_n - x_0} - \frac{d_i (y_n - y_0)}{x_n - x_0}, \\ f_i = \frac{x_n y_{i-1} - x_0 y_i}{x_n - x_0} - \frac{d_i (x_n y_0 - x_0 y_n)}{x_n - x_0}. \end{cases} \quad (5)$$

可以证明此定义求取迭代函数系统总用唯一的吸引子, 且该吸引子必定是某个连续函数的图形, 并同时通过各个插值点, 而这个连续函数就称为分形插值函数^[9].

2.2 四维空间分形插值法

分形插值基于地质数据的自相似性, 具体表现为矿床在空间上是不均匀分布的, 但矿床整体品位分布规律与其局部品位分布规律相似, 即矿床在空间上呈分形丛集分布^[10]. 通过钻孔品位数据得到整体品位分布规律, 并利用其对矿床进行品位插值, 能够有效地反映局部品位变化规律, 从而提高插值精度.

相对于克里金插值法, 分形插值利用拼贴原理得到迭代函数系统. 拼贴原理的实质是在矿床空间内通过寻找合适的压缩仿射变换, 使得钻孔品位数据拼贴成一个矿床整体品位数据集合. 在拼贴过程中能够很好地保留包含高频、局部与弱信息在内的原始信息, 从而克服克里金插值法的低通滤波性.

由于品位估算时需要利用三维空间信息, 加上地质品位就成为四维空间, 而传统的分形插值最多仅能计算三维空间^[11-12], 未充分考虑地质品位的空间信息, 在一定程度上影响了分形插值的推广能力, 因此本文提出四维空间分形插值算法.

令 $I = [\alpha \beta], J = [\gamma \delta], K = [\varepsilon \zeta]$, 设区域 $D = I \times J \times K = \{(x, y, z) | \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta, \varepsilon \leq z \leq \zeta\}$, 以 Δ_x, Δ_y 和 Δ_z 为步长, 将 D 剖分为网格:

$$\begin{cases} \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta, \\ \gamma = y_0 < y_1 < \dots < y_m = \delta, \\ \varepsilon = z_0 < z_1 < \dots < z_l = \zeta. \end{cases} \quad (6)$$

(1) X 坐标的插值公式, 其中 N 为 x 的可能取值.

$$\phi_n(x) = x_{n-1} + \frac{(x_n - x_{n-1})(x - x_0)}{x_n - x_0}, n \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (7)$$

(2) Y 坐标的插值公式, 其中 M 为 y 的可能取值.

$$\varphi_m(y) = y_{m-1} + \frac{(y_m - y_{m-1})(y - y_0)}{y_M - y_0},$$

$$m \in \{1, 2, \dots, M\}. \quad (8)$$

(3) Z 坐标的插值公式, 其中 L 为 z 的可能取值.

$$\vartheta_l(z) = z_{l-1} + \frac{(z_l - z_{l-1})(z - z_0)}{z_L - z_0}, \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}. \quad (9)$$

(4) W 品位的插值公式. 令

$$F_{n m l}(x, y, z, w) = g_{n m l}x + h_{n m l}y + p_{n m l}z + q_{n m l}xy + r_{n m l}xz + s_{n m l}yz + t_{n m l}xyz + u_{n m l}w,$$

$$n \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad m \in \{1, 2, \dots, M\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}.$$

由

$$\begin{cases} F_{n m l}(x_0, y_0, z_0, w_{0 \rho \rho}) = Z_{n-1 m-1 l-1}, \\ F_{n m l}(x_0, y_0, z_L, w_{0 \rho L}) = Z_{n-1 m-1 l}, \\ F_{n m l}(x_0, y_M, z_0, w_{0 M \rho}) = Z_{n-1 m l-1}, \\ F_{n m l}(x_0, y_M, z_L, w_{0 M L}) = Z_{n-1 m l}, \\ F_{n m l}(x_N, y_0, z_0, w_{N \rho \rho}) = Z_{n m-1 l-1}, \\ F_{n m l}(x_N, y_0, z_L, w_{N \rho L}) = Z_{n m-1 l}, \\ F_{n m l}(x_N, y_M, z_0, w_{N M \rho}) = Z_{n m l-1}, \\ F_{n m l}(x_N, y_M, z_L, w_{N M L}) = Z_{n m l}. \end{cases} \quad (10)$$

得

$$\begin{cases} z_{n-1 m-1 l-1} = g_{n m l}x_0 + h_{n m l}y_0 + p_{n m l}z_0 + q_{n m l}x_0y_0 + r_{n m l}x_0z_0 + s_{n m l}y_0z_0 + t_{n m l}x_0y_0z_0 + u_{n m l}w_{0 \rho \rho}, \\ z_{n-1 m-1 l} = g_{n m l}x_0 + h_{n m l}y_0 + p_{n m l}z_L + q_{n m l}x_0y_0 + r_{n m l}x_0z_L + s_{n m l}y_0z_L + t_{n m l}x_0y_0z_L + u_{n m l}w_{0 \rho L}, \\ z_{n-1 m l-1} = g_{n m l}x_0 + h_{n m l}y_M + p_{n m l}z_0 + q_{n m l}x_0y_M + r_{n m l}x_0z_0 + s_{n m l}y_Mz_0 + t_{n m l}x_0y_Mz_0 + u_{n m l}w_{0 M \rho}, \\ z_{n-1 m l} = g_{n m l}x_0 + h_{n m l}y_M + p_{n m l}z_L + q_{n m l}x_0y_M + r_{n m l}x_0z_L + s_{n m l}y_Mz_L + t_{n m l}x_0y_Mz_L + u_{n m l}w_{0 M L}, \\ z_{n m-1 l-1} = g_{n m l}x_N + h_{n m l}y_0 + p_{n m l}z_0 + q_{n m l}x_Ny_0 + r_{n m l}x_Nz_0 + s_{n m l}y_0z_0 + t_{n m l}x_Ny_0z_0 + u_{n m l}w_{N \rho \rho}, \\ z_{n m-1 l} = g_{n m l}x_N + h_{n m l}y_0 + p_{n m l}z_L + q_{n m l}x_Ny_0 + r_{n m l}x_Nz_L + s_{n m l}y_0z_L + t_{n m l}x_Ny_0z_L + u_{n m l}w_{N \rho L}, \\ z_{n m l-1} = g_{n m l}x_N + h_{n m l}y_M + p_{n m l}z_0 + q_{n m l}x_Ny_M + r_{n m l}x_Nz_0 + s_{n m l}y_Mz_0 + t_{n m l}x_Ny_Mz_0 + u_{n m l}w_{N M \rho}, \\ z_{n m l} = g_{n m l}x_N + h_{n m l}y_M + p_{n m l}z_L + q_{n m l}x_Ny_M + r_{n m l}x_Nz_L + s_{n m l}y_Mz_L + t_{n m l}x_Ny_Mz_L + u_{n m l}w_{N M L}. \end{cases} \quad (11)$$

3 实例验证

为了评价插值方法的质量, 本文将数据样本总体分为两组, 一组作为观测点 (待估计点), 另一组作为已知点, 然后通过已知点对观测点进行预测, 采用均方

误差 (MSE) [13] 作为验证指标.

$$MSE = \frac{\sum_{k=1}^n (Z_k^* - Z_k)^2}{n \cdot s^2}. \quad (12)$$

式中 Z_k^* 为观测点估计值, Z_k 为观测点实际值, s^2 为观测点实际值的方差.

均方误差越小, 预测值就越接近它们的真实值, 插值效果也就越好.

本文以某钼矿为工程背景, 基于 MATLAB 软件平台, 对该钼矿 468 个钻孔钼品位样本数据进行研究, 随机选取其中 252 个样本数据作为插值的初始值, 其余 216 个样本数据用来和插值结果进行对照. 以 100 m 水平为例, 利用 MATLAB 软件作钼矿四维空间分形插值算法品位等值线图与钼矿克里金插值法品位等值线图分别如图 1 和图 2 所示.

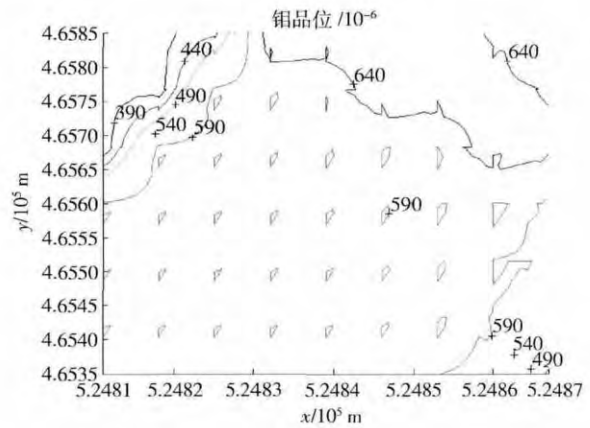


图 1 100 m 水平分形插值

Fig. 1 Fractal interpolation at the 100 m level

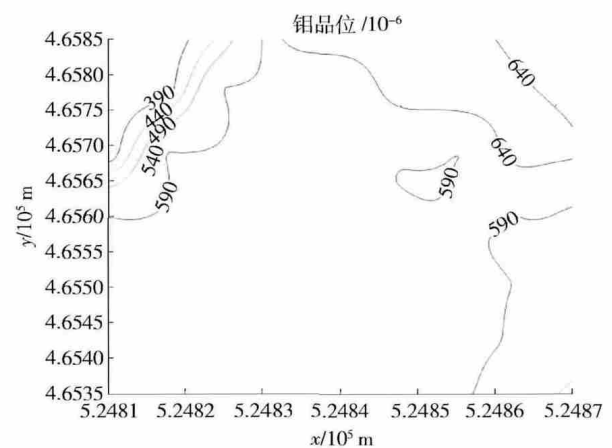


图 2 100 m 水平克里金插值

Fig. 2 Kriging interpolation at the 100 m level

对比图 1 和图 2 可以看出, 四维空间分形插值算法与克里金插值法的品位分布整体趋势相同. 但在中间位置, 分形插值中钼品位 (590×10^{-6}) 分布呈现零星

分布现象,而克里金插值则是表现为相对集中。这是由于分形插值具有自相似性,能够体现相邻两插值点之间的局部变化特征,而克里金插值则由于低通滤波

性而未能反映出品位分布的局部性。

用均方误差对这两种插值方法的插值精度进行对比。表1列出代表性观测点的插值误差对比。

表1 钼矿两种插值方法结果

Table 1 Results of two interpolation methods in molybdenum ore grade estimation

y/m	x/m	z/m	钼品位观测值/ 10^{-6}	分形插值误差	克里金插值误差
465620	5248180	100	594.8263	0.011751521	0.012588814
465700	5248250	100	594.4836	0.011729090	0.013762319
465380	5248670	100	491.3848	-0.007394643	0.007019079
465460	5248670	100	557.1922	0.002370298	0.004807368
465540	5248670	100	576.2724	0.008065163	0.005567949
465700	5248110	200	594.733	-0.005177851	0.004436979
465780	5248110	200	595.4168	0.055252780	-0.059105252
465380	5248600	200	923.9639	0.026653377	0.019697220
465620	5248600	200	1016.716	-0.041018674	0.062061316
465540	5248670	200	995.4822	-0.010591899	0.034773408
465780	5248110	300	701.9488	-0.004437747	0.019388099
465620	5248320	300	1064.548	-0.002040820	0.030878965
465780	5248460	300	1010.303	0.035103251	-0.053138138
465540	5248530	300	1937.489	0.032239192	0.042725035
465540	5248670	300	957.8489	0.023094816	0.035682428
465540	5248110	400	587.7758	-0.000612992	-0.007780875
465780	5248110	400	660.2681	-0.004770689	0.001987888
465460	5248390	400	658.8874	-0.008764155	-0.018133457
465620	5248390	400	893.1652	0.001446660	0.032450752
465380	5248530	400	1024.34	0.006630153	0.011699876
均方误差				1.14098×10^{-8}	2.20978×10^{-8}

由表1可以看出,采用四维空间分形插值算法估算的均方误差比克里金插值法降低48.4%,说明在该钼矿品位估算中,四维空间分形插值算法明显优于克里金插值法。

从插值原理上看:克里金插值法中任意两相邻插值点间的信息是通过光滑曲线连接的,从而掩盖了相邻两插值点间的局部变化特征,因而具有一定程度的光滑作用;而四维空间分形插值算法则是根据整体与局部相似的原理,将插值数据点的变化特征映射到相邻点之间的局部区域,从而得到两点间的局部变化特征,因而用四维空间分形插值算法更加准确。结合上述实例验证,四维空间分形插值算法在精度上优于克里金插值法。

4 结论

(1) 本文通过对分形插值理论的研究,在充分利用地质品位的空间信息和发挥分形理论自相似性的基

础上,提出了四维空间分形插值算法。

(2) 该方法克服了传统分形插值算法只反映平面信息的局限性和克里金插值法的低通滤波性,不仅能反映相邻两插值点之间的局部变化特征,而且能充分体现地质品位变化规律复杂的特点,使插值结果更加精确。

(3) 以某钼矿为例,将该方法应用于品位估算过程中。与克里金插值法相比,应用四维空间分形插值算法进行品位估算具有更高的预测精度,说明该方法在品位估算方面具有良好的应用前景。

参 考 文 献

- [1] Li G Q, Hu N L. Reserve evaluation model of polymetallic deposits based on multidimensional probability distributions. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2011, 33(3): 257
(李国清,胡乃联. 基于多维概率分布的多金属矿床储量估算模型. 北京科技大学学报, 2011, 33(3): 257)

- [2] Li J, Li C P, Li Z X. Grade interpolation in orebody based on support vector regression. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2009, 31(12): 1498
(李娟, 李翠平, 李仲学. 基于支持向量回归机的矿体品位插值. 北京科技大学学报, 2009, 31(12): 1498)
- [3] Li C P, Zheng Y X, Zhang J, et al. Ore grade interpolation model based on support vector machines optimized by genetic algorithms. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2013, 35(7): 837
(李翠平, 郑瑶瑕, 张佳, 等. 基于遗传算法优化的支持向量机品位插值模型. 北京科技大学学报, 2013, 35(7): 837)
- [4] Li Q M. Multifractal-Krige interpolation method. *Advances in Earth Science*, 2005, 20(2): 248
(李庆谋. 多维分形克里格方法. 地球科学进展, 2005, 20(2): 248)
- [5] Fan Y H, Luan Y Z, Wang Y, et al. The method study of combination of fractal interpolation and linear interpolation. *Sci Surv Mapp*, 2005, 30(2): 76
(范玉红, 栾元重, 王永, 等. 分形插值与传统插值相结合的方法研究. 测绘科学, 2005, 30(2): 76)
- [6] Li J, Wu S C, Gao Y T, et al. Rock and soil layer interface fitting method based on a Kriging and closest point coupled algorithm. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2012, 34(5): 500
(李健, 吴顺川, 高永涛, 等. 基于 Kriging 与 Closest Point 融合算法的边坡岩土层界面拟合. 北京科技大学学报, 2012, 34(5): 500)
- [7] Mi K F, Zhang J, Cao J G, et al. Vibration identification technology of tandem cold rolling mills based on wavelet and fractal analysis. *J Univ Sci Technol Beijing*, 2013, 35(8): 1064
(米凯夫, 张杰, 曹建国, 等. 基于小波和小波分形的冷连轧机振动识别方法. 北京科技大学学报, 2013, 35(8): 1064)
- [8] Li F, Liu H F, Zhang X J, et al. Determination of spontaneous combustion extent in coal seams on the basis of the fractal theory. *Coal Geol Explor*, 2013, 41(3): 15
(李峰, 刘鸿福, 张新军, 等. 基于分形理论确定地下煤层自燃火区范围. 煤田地质与勘探, 2013, 41(3): 15)
- [9] Sun H Q. *Fractal Geometry and Fractal Interpolation*. Beijing: Science Press, 2011
(孙洪泉. 分形几何与分形插值. 北京: 科学出版社, 2011)
- [10] Shi J F, Wang C N. Fractal analysis of gold deposits in China: implication for giant deposit exploration. *Earth Sci J China Univ Geosci*, 1998, 23(6): 616
(施俊法, 王春宁. 中国金矿床分形分布及对超大型矿床的勘查意义. 地球科学—中国地质大学学报, 1998, 23(6): 616)
- [11] Chen Y, Hu Y A, Lin T. Two-dimensional improved fractal model of the sea surface and sea spectrum evaluation. *J Commun*, 2013, 34(2): 177
(陈瑜, 胡云安, 林涛. 二维改进分形海面模型及海谱分析. 通信学报, 2013, 34(2): 177)
- [12] Sun H Q. The study of fractal interpolation on rectangular area. *Acta Math Sci*, 2009, 29A(3): 773
(孙洪泉. 矩形域上分形插值研究. 数学物理学报, 2009, 29A(3): 773)
- [13] Wu J H, Wang Y J. The spatial interpolation method efficiency evaluation of the coal mining isoline based on surfer. *China Min Mag*, 2007, 16(1): 109
(武俊红, 汪云甲. 基于 Surfer 的煤矿等值线空间插值方法有效性评价. 中国矿业, 2007, 16(1): 109)