

离散时间异质多智能体系统的一致性控制

刘聪[✉], 周强, 胡晓光

北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191
✉ 通信作者, E-mail: liucong_09@126.com

摘要 针对由一阶智能体和二阶智能体组成的离散异质多智能体系统, 研究其一致性问题. 设计无通信时延和具有有界通信时延的分布式一致性协议, 通过将系统转化为自治的离散时间线性时不变系统, 运用矩阵理论和代数图论方法, 分析得到系统实现一致性的充分条件. 获得的充分条件与采样周期、控制参数和系统的拓扑结构有关. 证明了系统的一致性不受有界通信时延影响. 数值仿真结果验证了理论结果的正确性.

关键词 异质系统; 多智能体系统; 离散时间系统; 一致性; 通信; 时延
分类号 TP11

Consensus control of discrete-time heterogeneous multi-agent systems

LIU Cong[✉], ZHOU Qiang, HU Xiao-guang

School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China
✉ Corresponding author, E-mail: liucong_09@126.com

ABSTRACT Consensus problems were investigated for discrete-time heterogeneous multi-agent systems composed of first-order agents and second-order agents. Distributed consensus protocols with and without the bound communication delay were respectively designed. By transforming the systems into autonomous discrete-time linear time-invariant systems and using the matrix theory and algebraic graph theory, sufficient conditions are derived for the systems reaching consensus. The obtained sufficient conditions are related to the sampling period, the control parameter and the system topology structure. It is proved that the consensus of the systems is independent of the bound communication delay. Simulation results verify the correctness of the theoretical results.

KEY WORDS heterogeneous systems; multi-agent systems; discrete time systems; consensus; communication; time delay

多智能体系统的一致性控制问题是多智能体协调控制中的关键问题. 近年来, 由于在机器人、传感器网络、控制工程、飞行器姿态控制等领域的广泛应用, 该问题引起各领域学者的广泛关注. 目前, 各国研究者已对多智能体系统一致性控制问题进行了许多研究^[1-8]. 例如, 文献[1]基于频率域分析方法研究存在输入时延和通信时延时一阶离散多智能体系统的一致性问题. 文献[2]研究不一致时延和切换拓扑下二阶离散多智能体系统的一致性问题, 取得系统状态一致的充分条件. 文献[7]用拉普拉斯变换研究有向拓扑和通信时延下多智能体系统的一致性, 取得达到一致性时系统的精确状态和允许的通信时延上界.

但是, 上述文献中的研究都是针对同质系统的, 即系统中的智能体具有相同的动态模型. 但是, 在实际应用中, 系统中的智能体往往是异质的, 因此进行异质多智能体系统一致性控制问题的研究十分有意义. 基于以上考虑, Yin等^[9]研究分数阶异质多智能体系统的一致性问题, 基于分数阶稳定性理论和克罗内克积技术, 分析得到保证一致性的线性矩阵不等式充分条件. Zheng等^[10]考虑了无向连通拓扑下的异质多智能体系统的一致性问题, 设计了线性一致性协议和考虑饱和约束的一致性协议. 在此基础上, Zheng等^[11]进一步研究在无法得到速度信息时的一致性, 提出两种不同的一致性协议, 取得一致性得以实现的充分

条件,并考虑同时存在输入约束时的一致性问題. Liu 等^[12]基于频率域分析方法研究异质系统的动态一致性问题. Tian 和 Zhang^[13]研究存在未知通信时延的异质系统的高阶一致性问题. 取得实现高阶一致性的充要条件. Sun 和 Zhu^[14]、Zheng 和 Wang^[15]研究一阶和二阶混合异质系统的有限时间一致性问题.

上述关于一阶和二阶混合异质系统的研究成果几乎都局限在无向图和满足特殊平衡条件的有向图,而一般有向拓扑下一阶和二阶混合异质系统的研究更具有实际意义. 基于以上分析,本文研究固定有向拓扑下一阶和二阶混合离散异质系统在无通信时延和有通信时延时的一致性控制问题,在这两种情况下分别为系统设计分布式的控制协议,基于矩阵分析和图论知识进行分析,得到与控制参数、采样周期和系统拓扑结构有关的一致性充分条件,且系统的一致性不受有界通信时延影响.

1 预备知识

I_n 表示 $n \times n$ 的单位矩阵, $\mathbf{1}_n(\mathbf{0}_n)$ 表示所有元素均为 1(0) 的 n 维列向量, $\mathbf{0}$ 表示合适维数的零矩阵.

令 $G = (V, E, A)$ 表示一个加权有向图,含有 n 个顶点,其中 $V = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ 为顶点集, $E \subseteq V \times V$ 为有向边集, $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为加权邻接矩阵,顶点索引属于一个有限集 $\mathcal{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. 记 $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 为有向图 G 中一条从顶点 v_j 出发到顶点 v_i 的有向边,顶点 v_j 称为父顶点,顶点 v_i 称为子顶点,与边 e_{ij} 相关联的加权邻接矩阵 A 的元素 a_{ij} 称为边的权值,它是非负的,且规定 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $e_{ij} \in E$, 否则 $a_{ij} = 0$. 顶点 v_i 的邻居集定义为 $N_i = \{v_j \in V; e_{ij} \in E\}$.

在有向图 G 中,一条有向路径是一个有限且有序的顶点序列 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_j}$, 其中相邻顶点满足 $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in E, k = 1, 2, \dots, j-1$. 有向树是一个有向图,除了根顶点外,其中的每个顶点恰有一个父顶点,根顶点具有到图中其余各个顶点的有向路径. 一个有向图的生成树是一棵有向树,它包括有向图所有的顶点和一些边.

图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A$, 其中 $D = \text{diag}\{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\}$ 为对角阵, A 为图 G 的邻接矩阵, $d_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n$. 显然有 $L \mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$.

引理 1^[16] 给定矩阵 $B = [b_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 满足 $b_{ii} \leq 0, b_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$ 且 $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0$, 则矩阵 B 至少有一个零特征值且非零特征值都具有负实部. 当且仅当矩阵 B 对应的有向图包含生成树, 矩阵 B 仅有一个零特征值.

如果矩阵 $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的所有元素是非负的, 则矩阵 C 是非负矩阵. 若矩阵 C 为非负矩阵且其所有行和都为 1, 则矩阵 C 为随机矩阵. 如果矩阵 C 为随

机矩阵且满足 $\lim_{m \rightarrow \infty} C^m = \mathbf{1}_n f^T, f \in \mathbf{R}^n$ 为常向量, 则矩阵 C 为 SIA (stochastic, indecomposable and aperiodic) 矩阵.

2 问题描述

记 $T > 0$ 为采样周期, $k \in \mathbf{N}$, 考虑由 n 个一阶和二阶智能体组成的离散时间异质多智能体系统. 二阶智能体的动态模型为

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + Tv_i(k), \\ v_i(k+1) = v_i(k) + Tu_i(k). \end{cases} \quad (1)$$

式中 $x_i(k) \in \mathbf{R}^l, v_i(k) \in \mathbf{R}^l$ 和 $u_i(k) \in \mathbf{R}^l$ 分别是第 $i \in \mathcal{I}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ 个二阶智能体的位置、速度和控制输入. 一阶智能体的动态模型为

$$x_i(k+1) = x_i(k) + Tu_i(k). \quad (2)$$

式中 $x_i(k) \in \mathbf{R}^l$ 和 $u_i(k) \in \mathbf{R}^l$ 分别是第 $i \in \mathcal{I}_n / \mathcal{I}_m = \{m+1, m+2, \dots, n\}$ 个一阶智能体的位置和控制输入.

不失一般性, 令 $l = 1$. 本文的目标是使系统 (1) 和 (2) 在无通信时延和有通信时延这两种情况下的状态都能渐近达到一致, 即在任意初始状态下都满足

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(k) - x_j(k)) = 0, i, j \in \mathcal{I}_n; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (v_i(k) - v_j(k)) = 0, i, j \in \mathcal{I}_m. \end{cases} \quad (3)$$

3 协议设计及分析

首先讨论理想情况(不存在通信时延)下系统的一致性问題.

为实现理想情况下系统 (1) 和 (2) 的一致性, 对于系统中的二阶离散智能体, 采用的一致性协议为

$$u_i(k) = -\alpha v_i(k) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)), i \in \mathcal{I}_m. \quad (4)$$

式中 $\alpha > 0$ 为控制参数. 对于系统中的一阶离散智能体, 采用的一致性协议为

$$u_i(k) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(k) - x_i(k)), i \in \mathcal{I}_n / \mathcal{I}_m. \quad (5)$$

将协议 (4) 和 (5) 分别代入系统 (1) 和 (2), 并记 $x_s(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k)]^T, v_s(k) = [v_1(k), v_2(k), \dots, v_m(k)]^T, x_f(k) = [x_{m+1}(k), x_{m+2}(k), \dots, x_n(k)]^T$, 可得

$$\begin{cases} x_s(k+1) = x_s(k) + Tv_s(k), \\ v_s(k+1) = -TL_{11}x_s(k) + (1-\alpha T)v_s(k) - TL_{12}x_f(k) \end{cases} \quad (6)$$

和

$$x_f(k+1) = -TL_{21}x_s(k) + (I_{n-m} - TL_{22})x_f(k). \quad (7)$$

式 (6) 和式 (7) 中, $L_{11} \in \mathbf{R}^{m \times m}, L_{12} \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}, L_{21} \in$

$\mathbf{R}^{(n-m) \times m}$ 和 $L_{22} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ 满足

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

记

$$\varphi(k) = [\mathbf{x}_s^T(k) \ \mathbf{p}_s^T(k) \ \mathbf{x}_f^T(k)]^T \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

将式(6)和(7)写成紧凑形式得

$$\varphi(k+1) = U\varphi(k). \quad (9)$$

式中,

$$U = \begin{bmatrix} I_m & TI_m & \mathbf{0} \\ -TL_{11} & (1-\alpha T)I_m & -TL_{12} \\ -TL_{21} & \mathbf{0} & I_{n-m} - TL_{22} \end{bmatrix}.$$

注意到 U 可以表示为

$$U = I_{n+m} - TV. \quad (10)$$

式中,

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -I_m & \mathbf{0} \\ L_{11} & \alpha I_m & L_{12} \\ L_{21} & \mathbf{0} & L_{22} \end{bmatrix}$$

引理 2 如果系统有向拓扑含有生成树,且 $\alpha > 1 + \max l_{ii}$ 时 $l_{ii}(i=1, 2, \dots, m)$ 为系统拉普拉斯矩阵的对角元素,那么矩阵 V 仅有一个零特征值,其余非零特征值均具有正实部.

证明:首先,对矩阵 V 作可逆变换

$$\hat{V} = MVM^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -I_m & \mathbf{0} \\ L_{11} - (\alpha-1)I_m & (\alpha-1)I_m & L_{12} \\ L_{21} & \mathbf{0} & L_{22} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_m & I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

易知,矩阵 \hat{V} 与 V 具有相同的特征值.注意到矩阵 \hat{V} 的行和为零,当 $\alpha > 1 + \max l_{ii}$ ($i=1, 2, \dots, m$) 时,矩阵 \hat{V} 可以看成是含有 $n+m$ 个顶点的图对应的拉普拉斯矩阵,则矩阵 \hat{V} 至少有一个零特征值,其余非零特征值都具有正实部,因此矩阵 V 至少有一个零特征值,其余非零特征值都具有正实部.

接下来,对矩阵 V 作初等行列变换

$$V \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{11} & L_{12} \\ \mathbf{0} & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix},$$

易知 $\text{rank}(V) = m + \text{rank}(L)$. 系统有向拓扑包含生成树,由引理 1 可知 $\text{rank}(L) = n-1$, 则 $\text{rank}(V) = n+m-1$. 因此,矩阵 V 仅有一个零特征值,其余非零特征值都具有正实部.

证毕.

引理 3 如果系统有向拓扑含有生成树, $0 < T <$

$\min_{\lambda_i \neq 0} (2\text{Re}(\lambda_i) / |\lambda_i|^2)$ 且 $\alpha > 1 + \max l_{ii}$ ($i=1, 2, \dots, m$) 为系统拉普拉斯矩阵的对角元素, λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为矩阵 V 的特征值,那么矩阵 U 仅有一个特征值为 1, 其余特征值均在复平面的单位圆内.

证明:由引理 2 知矩阵 V 仅有一个零特征值,其余非零特征值均具有正实部.另外,由式(10)易知 $\mu_i = 1 - T\lambda_i$, μ_i 是矩阵 U 的特征值, λ_i 是矩阵 V 的特征值,因此矩阵 U 仅有一个特征值为 1.

不失一般性,记 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) + i\text{Im}(\lambda_i)$, $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, $i=2, 3, \dots, n+m$, i 为虚数单位, $i = \sqrt{-1}$. 因此有

$$|\mu_i|^2 = (1 - T\text{Re}(\lambda_i))^2 + (-T\text{Im}(\lambda_i))^2 = T(|\lambda_i|^2 T - 2\text{Re}(\lambda_i)) + 1 < 1,$$

即 $|\mu_i| < 1$ ($i=2, 3, \dots, n+m$). 综上可知,矩阵 U 仅有一个特征值为 1, 其余特征值均在复平面的单位圆内.

证毕.

从引理 3 可知,矩阵 U 的特征值分布不仅与控制参数和系统的拓扑结构有关,还与系统的采样周期有密切的关系.

定理 1 如果系统有向拓扑含有生成树, $0 < T < \min_{\lambda_i \neq 0} (2\text{Re}(\lambda_i) / |\lambda_i|^2)$ 且 $\alpha > 1 + \max l_{ii}$ 时 $l_{ii}(i=1, 2, \dots, m)$ 为系统拉普拉斯矩阵的对角元素, λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为矩阵 V 的特征值,则系统(1)和(2)在协议(4)和(5)的作用下渐近实现一致.

证明:由引理 3 知矩阵 U 仅有一个特征值为 1, 其余特征值均在复平面的单位圆内.

设 $p_{r1} = [\mathbf{1}_m^T \ \mathbf{0}_m^T \ \mathbf{1}_{n-m}^T]^T$, 利用 $L\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$, 容易验证 $Up_{r1} = 1p_{r1}$, 因此 p_{r1} 是矩阵 U 对应于特征值 1 的特征向量. 令 J 为矩阵 U 的 Jordan 标准形, 则必存在非奇异矩阵 $P \in \mathbf{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ 使得 $U = PJP^{-1}$. 不失一般性,记

$$P = [p_{r1} \ p_{r2} \ \dots \ p_{r,n+m}] P^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11}^T \\ q_{12}^T \\ \vdots \\ q_{1,n+m}^T \end{bmatrix}.$$

其中 $p_{ri} \in \mathbf{R}^{n+m}$ ($i=1, 2, \dots, n+m$) 为矩阵 U 的右特征向量和广义右特征向量, $q_{1i} \in \mathbf{R}^{n+m}$ ($i=1, 2, \dots, n+m$) 为矩阵 U 的左特征向量和广义左特征向量, 则有

$$U^k = \underbrace{PJP^{-1}PJP^{-1} \dots PJP^{-1}}_k = P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n+m-1}^T \\ \mathbf{0}_{n+m-1} & \bar{J} \end{bmatrix}^k P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n+m-1}^T \\ \mathbf{0}_{n+m-1} & \bar{J}^k \end{bmatrix} P^{-1}.$$

式中 \bar{J} 为矩阵 U 的非 1 特征值对应的 Jordan 块.

注意到矩阵 U 的非 1 特征值都在复平面的单位圆内, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} P \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{n+m-1}^T \\ \mathbf{0}_{n+m-1} & \bar{J}^k \end{bmatrix} P^{-1} \varphi(0) = P_{11} \mathbf{q}_{11}^T \varphi(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m \mathbf{q}_{11}^T \varphi(0) \\ \mathbf{0}_m \\ \mathbf{1}_{n-m} \mathbf{q}_{11}^T \varphi(0) \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中 $\varphi(0) = [x_s^T(0) \ v_s^T(0) \ x_f^T(0)]^T$ 为系统的初始值. 由式(11)可以看出 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \mathbf{q}_{11}^T \varphi(0) \ i \in \mathcal{I}_n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0 \ i \in \mathcal{I}_m$, 即满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(k) - x_j(k)) = 0$, $i, j \in \mathcal{I}_n, \lim_{k \rightarrow \infty} (v_i(k) - v_j(k)) = 0 \ i, j \in \mathcal{I}_m$, 系统(1)和(2)在协议(4)和(5)的作用下渐近实现一致.

证毕.

从定理 1 的证明可以看出, 系统达到一致性时的平衡点与矩阵 U 的特征值 1 的左特征向量和系统的初始值有关.

接下来分析存在通信延时系统(1)和(2)的一致性. 假定智能体之间的通信时延不一致, 且通信时延有界. 将协议(4)和(5)分别改写为

$$u_i(k) = -\alpha v_i(k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(k - \tau_{ij}) - x_i(k)) \quad i \in \mathcal{I}_m \quad (12)$$

和

$$u_i(k) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(k - \tau_{ij}) - x_i(k)) \quad i \in \mathcal{I}_n / \mathcal{I}_m. \quad (13)$$

式(12)和式(13)中, $\alpha > 0$ 为控制参数, τ_{ij} 为从智能体 j 到智能体 i 的通信时延且 $\tau_{ij} \leq \tau_{\max}$, 这里 τ_{ij}, τ_{\max} 均为正整数.

将协议(12)和(13)分别代入系统(1)和(2), 并记 $x_s(k) = [x_1(k), \dots, x_m(k)]^T, v_s(k) = [v_1(k), \dots, v_m(k)]^T, x_f(k) = [x_{m+1}(k), \dots, x_n(k)]^T$, 可得

$$\begin{cases} x_s(k+1) = x_s(k) + T v_s(k), \\ v_s(k+1) = -T D_s x_s(k) + (1 - \alpha T) v_s(k) + T A_{s,1} x_s(k-1) + \dots + T A_{s,\sigma_{\max}} x_s(k - \tau_{\max}) + T A_{sf,1} x_f(k-1) + \dots + T A_{sf,\sigma_{\max}} x_f(k - \tau_{\max}) \end{cases} \quad (14)$$

和

$$x_f(k+1) = T A_{fs,1} x_s(k-1) + \dots + T A_{fs,\sigma_{\max}} x_s(k - \tau_{\max}) + T A_{f,1} x_f(k-1) + \dots + T A_{f,\sigma_{\max}} x_f(k - \tau_{\max}) + (I_{n-m} - T D_f) x_f(k). \quad (15)$$

式(14)和式(15)中,

$$D = \text{diag}\{D_s, D_f\}, \sum_{i=1}^{\tau_{\max}} A_{s,i} = A_s, \sum_{i=1}^{\tau_{\max}} A_{sf,i} = A_{sf}, \sum_{i=1}^{\tau_{\max}} A_{f,i} = A_f,$$

$$\sum_{i=1}^{\tau_{\max}} A_{fs,i} = A_{fs}, A = \begin{bmatrix} A_s & A_{sf} \\ A_f & A_{fs} \end{bmatrix}.$$

令 $y_s(k) = x_s(k) + \alpha T v_s(k)$, 并记 $\gamma(k) = [x_s^T(k) \ y_s^T(k) \ x_f^T(k)]^T, z(k) = [\gamma^T(k) \ \gamma^T(k-1) \ \dots \ \gamma^T(k - \tau_{\max})]^T$. 结合式(14)和(15)可得

$$z(k+1) = H z(k). \quad (16)$$

式中,

$$H = \begin{bmatrix} W_0 & W_1 & \dots & W_{\tau_{\max}-1} & W_{\tau_{\max}} \\ I_{n+m} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n+m} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I_{n+m} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(\tau_{\max}+1)(n+m) \times (\tau_{\max}+1)(n+m)},$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} (1 - \frac{1}{\alpha}) I_m & \frac{1}{\alpha} I_m & \mathbf{0} \\ (\alpha T - \frac{1}{\alpha}) I_m - \alpha T^2 D_s & (1 - \alpha T + \frac{1}{\alpha}) I_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n-m} - T D_f \end{bmatrix},$$

$$W_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \alpha T^2 A_{s,i} & \mathbf{0} & \alpha T^2 A_{sf,i} \\ T A_{fs,i} & \mathbf{0} & T A_{f,i} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, \tau_{\max}.$$

引理 4^[17] 令矩阵 $W_i \in \mathbf{R}^{n \times n} \ i = 0, 1, \dots, \tau_{\max}$ 为非负矩阵, 矩阵 B 形如式(16)中的矩阵 H , 矩阵 $W = \sum_{i=0}^{\tau_{\max}} W_i$, 若 W_0 的主对角线元素都为正, W 为随机矩阵且以 W 为邻接矩阵的图包含生成树, 则矩阵 B 为 SIA 矩阵.

定理 2 系统(1)和(2)在协议(12)和(13)的作用下渐近实现一致. 如果系统有向拓扑含有生成树, 并满足 $\alpha > 1$ 且 $\alpha^2 T^2 \max_{i=1, 2, \dots, m} \sum_{j=1}^n a_{ij} < \alpha^2 T - 1 < \alpha$,

$$T \max_{i=m+1, m+2, \dots, n} \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1.$$

证明: 当 $\alpha > 1$ 且 $\alpha^2 T^2 \max_{i=1, 2, \dots, m} \sum_{j=1}^n a_{ij} < \alpha^2 T - 1 < \alpha$,

$$T \max_{i=m+1, m+2, \dots, n} \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1 \text{ 时, } W_0 \text{ 为非负矩阵. 令 } W =$$

$\sum_{i=0}^{\tau_{\max}} W_i$, 则 W 为随机矩阵. 对矩阵 $I_{n+m} - W$ 作初等行列变换, 得

$$I_{n+m} - W \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_s - A_s & -A_{sf} \\ \mathbf{0} & -A_{fs} & D_f - A_f \end{bmatrix}.$$

可以看出 $\text{rank}(I_{n+m} - W) = m + \text{rank}(L)$. 系统有向拓扑含有生成树, 由引理 1 可知 $\text{rank}(L) = n - 1$, 则 $\text{rank}(I_{n+m} - W) = n + m - 1$, 矩阵 $I_{n+m} - W$ 仅有一个零特征值, 由引理 1 可知以矩阵 W 为邻接矩阵的图包含有

向树. 同时注意到矩阵 W_0 的主对角线元素都为正, 由引理 4 可知矩阵 H 为 SIA 矩阵, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} z(k) = \mathbf{1}_{(\tau_{max}+1)(n+m)} f^T z(0)$, $f \in \mathbf{R}^{(\tau_{max}+1)(n+m)}$ 为常向量, 因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = f^T z(0)$, $i \in \mathcal{N}_n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0$, $i \in \mathcal{N}_m$, 即系统 (1) 和 (2) 在协议 (12) 和 (13) 的作用下渐近实现一致.

证毕.

4 仿真实例

给定采样周期 $T = 0.1$ s, 考虑一个由 3 个二阶智能体、2 个一阶智能体组成的异质多智能体系统, 其拓扑结构如图 1 所示, 其中, 1、2 和 3 为二阶 A 和 5 为一阶.

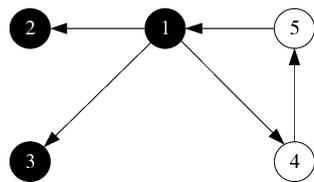


图 1 有向拓扑图

Fig. 1 Directed topology graph

令 $e_{ij} = (v_i, p_j) \in E$ 时 $a_{ij} = 1$, $i, j \in \mathcal{N}_5$, 则 $\max l_{ii} = 1$, $i \in \mathcal{N}_3$, $\max_{i=1,2,3} \sum_{j=1}^5 a_{ij} = 1$, $\max_{i=4,5} \sum_{j=1}^5 a_{ij} = 1$.

不存在通信时延, 由定理 1 可知应满足 $\alpha > 2$, 取 $\alpha = 3$. 计算矩阵 V 的特征值并代入 $2\text{Re}(\lambda_i) / |\lambda_i|^2$ 可得 $0 < T < 0.7260$ s, 给定的采样周期在允许的范围. 取系统初始值为 $x(0) = [5, -1, -4, 2, -3]^T$ 和 $v(0) = [1, 3, 2]^T$ 进行仿真, 仿真结果如图 2 和图 3 所示. 由图 2 和图 3 可以看出, 系统 (1) 和 (2) 在协议 (4) 和 (5) 的作用下渐近一致, 验证了定理 1 的正确性.

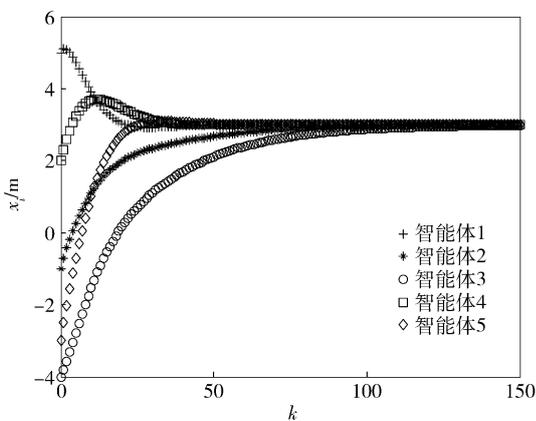


图 2 无通信时延位置曲线

Fig. 2 Curves of position without communication delay

存在通信时延, 令 $\tau_{21} = \tau_{41} = \tau_{54} = 1$, $\tau_{15} = \tau_{31} =$

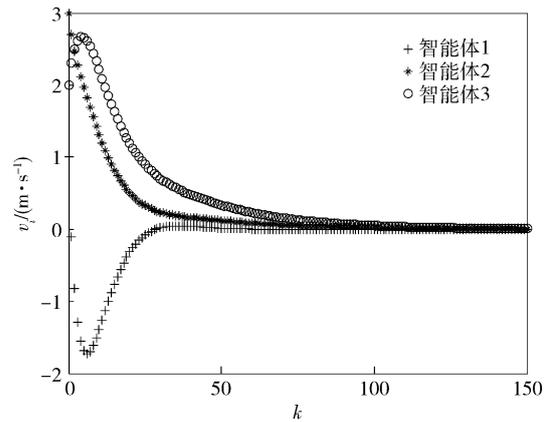


图 3 无通信时延速度曲线

Fig. 3 Curves of velocity without communication delay

2, 取 $\alpha = 4$ 使定理 2 的条件满足, 取系统初始值 $x(0) = [1, 6, -3, 3, -4]^T$, $v(0) = [-2, 1, 4]^T$, $x(-i) = v(-i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, \tau_{max}$ 均为零向量, 进行仿真, 仿真结果如图 4 和图 5 所示. 由图 4 和图 5 可以看出, 系统 (1) 和 (2) 在协议 (12) 和 (13) 的作用下渐近一致, 验证了定理 2 的正确性.

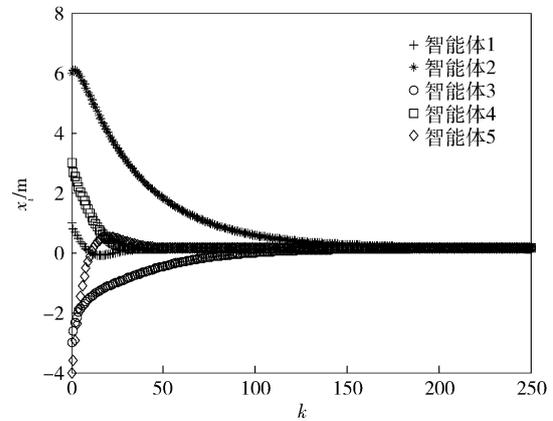


图 4 有通信时延位置曲线

Fig. 4 Curves of position with communication delay

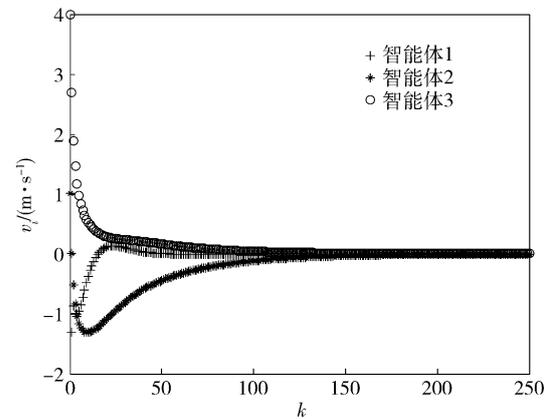


图 5 有通信时延速度曲线

Fig. 5 Curves of velocity with communication delay

5 结论

本文研究了固定拓扑下由一阶和二阶智能体组成的混合离散系统在理想情况下和存在通信时延时的一致性问题的结论如下:

(1) 提出的线性分布式一致性协议在一定条件下可保证系统渐近一致;

(2) 得到了系统实现一致的充分条件, 该条件与协议控制参数、系统采样周期和拓扑结构有关;

(3) 理想情况下系统的一致性平衡点依赖于系统矩阵 U 的特征值 1 的左特征向量和系统的初始状态;

(4) 系统的一致性不受有界通信时延影响.

参 考 文 献

- [1] Tian Y P, Liu C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays. *IEEE Trans Autom Control*, 2008, 53(9): 2122
- [2] Lin P, Jia Y M. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 2009, 45(9): 2154
- [3] Liu C L, Liu F. Dynamical consensus seeking of second-order multi-agent systems based on delayed state compensation. *Syst Control Lett*, 2012, 61(12): 1235
- [4] Zhou W M, Xiao J W. Dynamic average consensus and consensus-ability of general linear multiagent systems with random packet dropout. *Abstr Appl Anal*, 2013, 2013: 1
- [5] Ding L, Han Q L, Guo G. Network-based leader-following consensus for distributed multi-agent systems. *Automatica*, 2013, 49(7): 2281
- [6] Zhou B, Lin Z L. Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays. *Automatica*, 2014, 50(2): 452
- [7] Liu B, Wang L, Sun D H, et al. Consensus of multiagent systems with directed topology and communication time delay bases on the Laplace transform. *Math Probl Eng*, 2014, 2014: 1
- [8] Djaidja S, Wu Q H, Fang H. Leader-following consensus of double-integrator multi-agent systems with noisy measurements. *Int J Control Autom Syst*, 2015, 13(1): 17
- [9] Yin X X, Yue D, Hu S L. Consensus of fractional-order heterogeneous multi-agent systems. *IET Control Theory Appl*, 2013, 7(2): 314
- [10] Zheng Y S, Zhu Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems. *IET Control Theory Appl*, 2011, 5(16): 1881
- [11] Zheng Y S, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems without velocity measurements. *Int J Control*, 2012, 85(7): 906
- [12] Liu C L, Liu F. Dynamical consensus seeking of heterogeneous multi-agent systems under input delays. *Int J Commun Syst*, 2013, 26(10): 1243
- [13] Tian Y P, Zhang Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays. *Automatica*, 2012, 48(6): 1205
- [14] Sun F L, Zhu W. Finite-time consensus for heterogeneous multi-agent systems with mixed-order agents. *Int J Syst Sci*, 2015, 46(11): 1961
- [15] Zheng Y S, Wang L. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with and without velocity measurements. *Syst Control Lett*, 2012, 61(8): 871
- [16] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans Automat Control*, 2005, 50(5): 655
- [17] Xiao F, Wang L. State consensus for multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays. *Int J Control*, 2006, 79(10): 1277