

应用格子 Boltzmann 方法直接数值模拟研究钢中夹杂物上浮及碰撞行为

王 耀^{1,2)}, 于小南^{1,2)}, 郭洛方³⁾, 李 宏^{1,2)}✉, 朱少楠^{1,2)}

1) 北京科技大学钢铁冶金新技术国家重点实验室, 北京 100083 2) 北京科技大学冶金与生态工程学院, 北京 100083

3) 青岛钢铁控股集团股份有限公司技术中心, 北京 100083

✉ 通信作者, E-mail: lihong@metall.ustb.edu.cn

摘 要 采用格子 Boltzmann 方法对钢液中夹杂物上浮及上浮过程中的碰撞行为进行直接数值模拟研究. 结果表明, 不同尺寸夹杂物颗粒上浮速度的模拟结果和理论值基本一致, 表明本文所采用的数值算法能够精确有效地对钢液中固相夹杂物颗粒运动行为进行研究. 当钢液中直径为 80 μm 的夹杂物颗粒位于直径为 40 μm 的下方并一起上浮时, 直径为 80 μm 的夹杂物颗粒会逐渐追赶上直径为 40 μm 的夹杂物颗粒并发生碰撞形成大尺寸凝聚体, 凝聚体的上浮速度显著大于二者单独上浮时的上浮速度. 对于直径为 40 μm 的夹杂物来说, 形成凝聚体后的上浮速度比单独上浮时的上浮速度增加 300%. 实际炼钢过程中, 采取必要的措施增加夹杂物颗粒之间上浮过程中的碰撞凝聚, 对于提高夹杂物颗粒的上浮速度, 尤其是小尺寸夹杂物上浮去除速度, 提高钢液的洁净度具有重要的意义.

关键词 夹杂物去除; 上浮; 碰撞; 直接数值模拟

分类号 TF704.7; TF777.1

Direct numerical simulation of inclusion floating and collision behavior in molten steel using the lattice Boltzmann method

WANG Yao^{1,2)}, YU Xiao-nan^{1,2)}, GUO Luo-fang³⁾, LI Hong^{1,2)}✉, ZHU Shao-nan^{1,2)}

1) State Key Laboratory of Advanced Metallurgy, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

2) School of Metallurgical and Ecological Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

3) Technology Center, Qingdao Iron and Steel Group Co., Ltd., Qingdao 266043, China

✉ Corresponding author, E-mail: lihong@metall.ustb.edu.cn

ABSTRACT The floating and collision behavior of inclusions in the floating process was numerically simulated by using the Lattice Boltzmann method. It is found that the floating velocity simulation results of different size inclusion particles are almost the same as the theoretical value, which demonstrates that the motion behavior of solid inclusion particles can be investigated concisely and effectively by using the numerical algorithm adopted in this paper. When an inclusion particle with a diameter of 80 μm locates below an inclusion particle with a diameter of 40 μm and floats up at the same time, the inclusion particle with a diameter of 80 μm can catch up with the inclusion particle with a diameter of 40 μm , collide with each other and grow up into a big inclusion cluster. When the inclusion particles with diameters of 80 μm and 40 μm floats up separately, the floating velocity of the inclusion cluster is bigger than them. For the inclusion particle with a diameter of 40 μm , the floating velocity after collision with the bigger size inclusion particle increases by 300% compared with that of floating separately. In the steelmaking process, it is necessary to take measures to enhance collision and coagulation in the floating process, which will improve the floating velocity of inclusions especially for small size inclusions and have a great importance on the cleanliness of steel.

KEY WORDS inclusions removal; floating; collision; direct numerical simulation

收稿日期: 2015-05-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51074020)

炼钢过程中由于脱氧剂的加入钢液中会生成不同尺寸和形貌的夹杂物颗粒,夹杂物颗粒上浮至钢液表面然后进入熔渣中,这是由钢液中将其去除的最直接的方式. 对于小尺寸的固相夹杂物颗粒来说,其在钢液中的上浮速度较小,主要通过彼此之间碰撞聚合长大,然后再由钢液中上浮去除,如铝镇静钢由于细小氧化铝颗粒碰撞形成大尺寸簇群状氧化铝^[1-3]. 因此,展开钢液中夹杂物颗粒上浮,特别是夹杂物颗粒之间碰撞凝聚规律的研究,对于加速细小夹杂物颗粒的去除和提高钢液的洁净度具有重要意义.

针对上述问题,国内外众多学者进行了大量的研究,其中基于 Euler-Lagrange 模型的数值模拟是研究钢液中夹杂物动力学行为最常见的方法. 张邦文等^[4-5]应用 Lagrange 方法在求解连铸中间包钢液流场的基础上对不同尺寸夹杂物颗粒的运动轨迹进行研究; Lei 和 He^[6]对结晶器内夹杂物的运动轨迹及碰撞凝聚行为进行研究. 但是,钢液中夹杂物颗粒的尺寸较小,其在钢液中的运动涉及复杂的流-固耦合过程,传统的 Euler-Lagrange 模型通常将不同尺寸和形貌的夹杂物当作质点处理,很难对夹杂物在钢液中的运动及碰撞凝聚机理进行研究. 因此需要探索一种新的数值计算方法,来研究不同尺寸和形貌夹杂物颗粒在钢中上浮及碰撞凝聚的规律.

格子 Boltzmann 方法是近些年来发展的一种全新的数值计算方法. 该方法兼具宏观尺度的连续介质模型和微观尺度的分子动力学模型的优点, Ladd、Aidun 等开创性的工作使得应用该方法研究液相中固相颗粒的动力学行为成为可能^[7-11]. 本文首先应用格子 Boltzmann 方法对钢液中不同尺寸夹杂物颗粒上浮行为进行讨论,并对该方法的可靠性进行验证,然后应用该方法考察不同尺寸夹杂物颗粒上浮碰撞凝聚行为,探索碰撞凝聚过程中不同尺寸和形貌的夹杂物速度的变化规律.

1 研究方法

1.1 计算流体流动的格子 Boltzmann 方法

与基于流体连续介质假设的传统计算流体力学方法不同,格子 Boltzmann 方法将流体系统看成是大量虚拟的微观流体粒子组成的集合体,着眼于流体粒子速度分布函数在空间离散格点进行迁移和演化的过程^[7-11],如图 1 所示流体粒子按照一定的离散速度在空间离散网格上进行碰撞和迁移,然后依据宏观物理量(速度、密度等)与流体粒子速度分布函数之间的关系得到宏观流动信息.

流体粒子在时空的演变规则由格子 Boltzmann 方程加以确定. 当前最常用的格子 Boltzmann 方程是 BGK

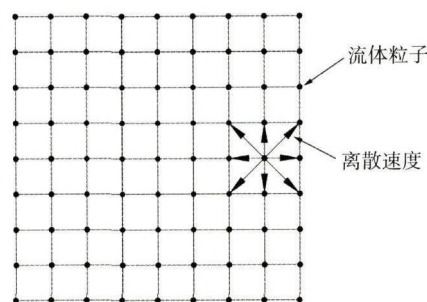


图 1 格子 Boltzmann 流体示意图

Fig. 1 Schematic view of a lattice Boltzmann fluid

(Bhatnagar-Cross-Krook) 模型,它的表达式如下^[12]:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)). \quad (1)$$

式中, i 表示离散速度方向, $\mathbf{x}$ 表示流体粒子的空间位置, t 表示时间, Δt 表示流体粒子运动的时间步长, $\mathbf{e}_i$ 表示离散速度矢量, τ 表示弛豫时间, $f_i(\mathbf{x}, t)$ 表示流体粒子在 i 方向的速度分布函数, $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ 表示流体粒子平衡态分布函数. 平衡态分布函数 $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ 的选择要满足流体运动过程的质量守恒和动量守恒,通过选择适当的平衡态分布函数,式(1)所示的格子 Boltzmann 方程可以推导得到宏观 Navier-Stokes 方程.

在所有的 BGK 模型中,至今应用最为广泛的离散速度集合就是 Chen、Qian 等提出的 DnQb 模型. 其中 n 表示空间维数, b 表示离散速度的数目. 本文主要研究钢液中固态夹杂物颗粒的上浮动力学过程,因此采用 D3Q19 模型,即三维空间中流体粒子速度分布函数有 19 个方向的离散速度,如图 2 所示^[13].

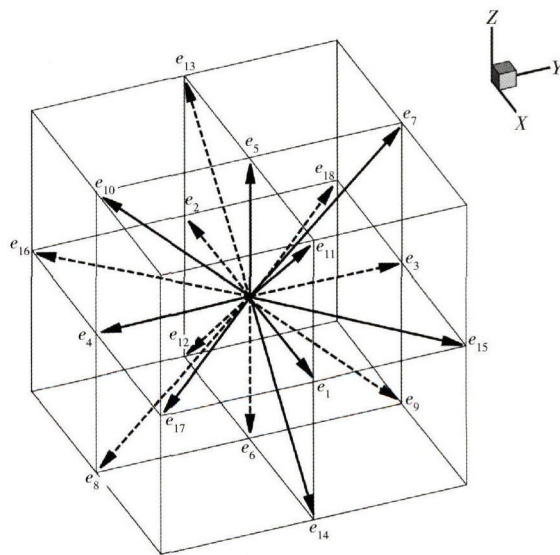


图 2 D3Q19 模型

Fig. 2 D3Q19 model

在该模型中离散速度 $\mathbf{e}_i$ 可以表示为^[14]

$$e_{0 \sim 18} = c \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中 $c = \Delta x / \Delta t$ 为格子速度, 表示为空间步长 Δx 与时间步长 Δt 的比值. 平衡态速度分布函数可以表示为^[1]

$$f_i^{\text{eq}}(x, t) = w_i \rho \left[1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{|u|^2}{2c_s^2} \right]. \quad (3)$$

式中: ρ 表示流体宏观密度; u 表示宏观速度; $c_s = c/\sqrt{3}$ 表示格子声速; w_i 表示权重系数, 用来确保流体的各向同性. 不同离散速度方向权重系数 w_i 可由下式确定:

$$w_i = \begin{cases} 1/3, & i = 0; \\ 1/18, & i = 1 \sim 6; \\ 1/36, & i = 7 \sim 18. \end{cases} \quad (4)$$

数值计算过程中流体的运动黏度 ν 与量纲一的松弛时间 τ 的关系可以表示为

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta x^2}{\Delta t}. \quad (5)$$

流体的宏观密度 $\rho(x, t)$ 和宏观速度 $u(x, t)$, 与速度分布函数 $f_i(x, t)$ 之间的关系可由下式表示:

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t), \quad (6)$$

$$\rho u(x, t) = \sum_i e_i f_i(x, t). \quad (7)$$

1.2 夹杂物颗粒和钢液耦合数学模型

钢液中不同类型夹杂物的尺寸较小, 一般为微米级, 并且形貌结构也各不相同. 常见的研究钢液中夹杂物颗粒运动的方法为 Lagrange 法. 该方法将夹杂物颗粒当作质点处理, 不考虑尺寸形貌对其运动行为的影响, 因而无法对其在钢液中的运动及碰撞凝聚机理进行研究. 如何处理不同尺寸形貌夹杂物颗粒运动过程中其与钢液之间复杂的流-固耦合作用是研究其运动行为的关键. Ladd、Aidun 等^[7-9] 开创性地建立了基于有限体积颗粒的格子 Boltzmann 方法, 该方法为直接模拟研究固体颗粒在液相的运动行为奠定了基础. 在该方法中, 流体的流动使用格子 Boltzmann 方法加以描述, 并将固体颗粒用一组离散边界点来描述. 以球形夹杂物颗粒为例, 其在二维平面上可以表示为图 3 所示的灰色圆形区域. 在颗粒运动的过程中, 原先的流体格点会被固体颗粒覆盖成为固体格点, 固体边界则用流体格点和固体格点连线的中心位置处的边界格点加以表示. 在计算区域网格划分细致的情况下, 离散边界格点可以较为精确地描绘出固体颗粒的大小和形状.

固体颗粒运动速度与边界节点速度的关系可表示为

$$u_b = U_p + \Omega_p \times (r_b - R). \quad (8)$$

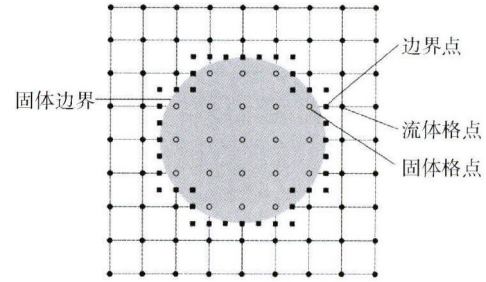


图3 固体颗粒和流体耦合模型

Fig. 3 Coupling model of the solid particle and fluid

式中, u_b 是边界点速度, U_p 是颗粒移动速度, Ω_p 是颗粒角速度, R 是颗粒质量中心的坐标, r_b 是边界节点坐标.

边界节点 x_b 处颗粒受到的作用力可由下式表示^[1]:

$$F_i^f(x_b, t) = 2 \left[f_i(x_b, t) - 2w_i \rho \frac{u_b \cdot e_i}{c_s^2} \right] \frac{\Delta x}{\Delta t} e_i. \quad (9)$$

对颗粒周围所有边界格点受到的作用力和力矩进行求和, 可得固体颗粒受到的总作用力和总力矩:

$$F_p = \sum_{x_b} \sum_i F_i^f(x_b, t), \quad (10)$$

$$T_p^f = \sum_{x_b} \sum_i (r_b \times F_i^f(x_b, t)). \quad (11)$$

在此受力分析的基础上, 固体颗粒的平动和转动方程可由牛顿第二定律加以描述, 如下式所示:

$$m_p \frac{d^2 x_p}{dt^2} = F_p^f + F_p^{\text{ext}}, \quad (12)$$

$$I_p \frac{d^2 \theta_p}{dt^2} = T_p^f + T_p^{\text{ext}}. \quad (13)$$

式中: m_p 和 x_p 分别表示固体颗粒的质量和位置; F_p^f 为黏滞阻力; F_p^{ext} 为外部场力, 本研究中主要指重力和浮力; I_p 和 θ_p 分别表示颗粒惯性矩和转动角度; T_p^f 为固体颗粒受到的黏滞力矩; T_p^{ext} 为外力场产生的力矩.

1.3 初始条件和边界条件设置

图4为模拟区域的结构示意图. 从图中可以看出模拟区域为一矩形腔, 假设腔内充满钢液, 矩形腔的底部、侧面和顶部均为周期性边界条件. 初始时不同尺寸夹杂物颗粒位于模拟区域的底部中心处, 模拟夹杂物颗粒和钢液的运动, 其物性参数如表1所示. 计算区域的大小为 $1371 \mu\text{m} \times 1371 \mu\text{m} \times 1486 \mu\text{m}$, 并将其划分为 $120 \times 120 \times 130$ 的网格, 因此单位网格即空间步长 $\Delta x = 11.43 \mu\text{m}$, 时间步长的选取则与空间步长、钢液及夹杂物颗粒的物性参数有关, 本研究中时间步长 $\Delta t = 3.05 \times 10^{-5} \text{ s}$.

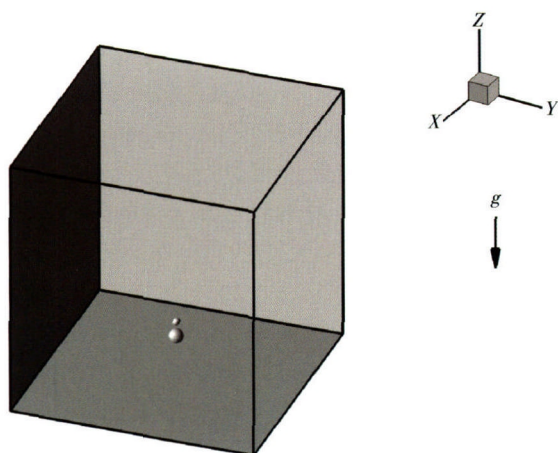
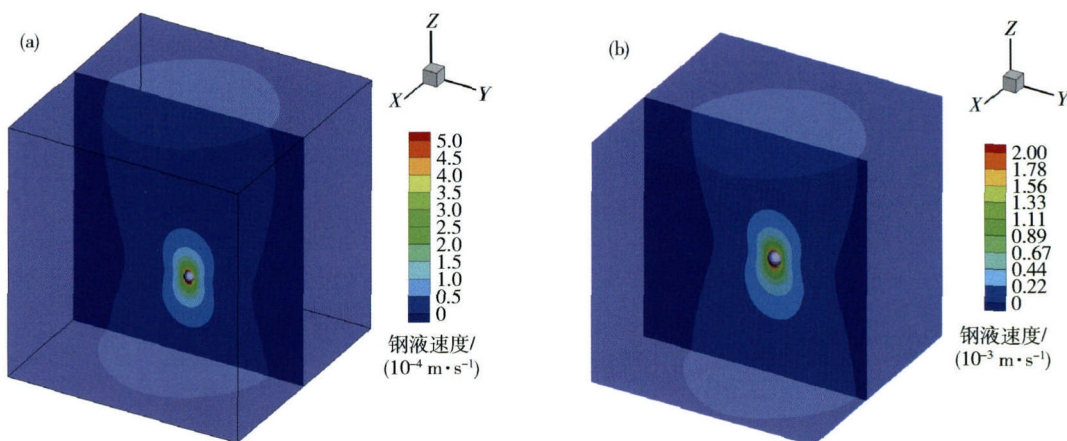


图4 模拟区域结构示意图

Fig. 4 Schematic view of the simulation domain

表1 钢液与 Al_2O_3 夹杂物颗粒的物性参数Table 1 Physical properties of steel and Al_2O_3 inclusion particles

类型	符号	取值
Al_2O_3 密度/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	ρ_p	3600
钢液密度/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	ρ_m	7000
钢液动力黏度/($\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$)	μ_m	0.005
重力加速度/($\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$)	g	9.8

图5 不同尺寸夹杂物颗粒上浮达到稳定时模拟区域 $Y-Z$ 中心对称面上钢液速度分布图. (a) $d = 40 \mu\text{m}$; (b) $d = 80 \mu\text{m}$ Fig. 5 Velocity distribution in the $Y-Z$ symmetry plane of the computational domain when different size inclusions stably floats: (a) $d = 40 \mu\text{m}$; (b) $d = 80 \mu\text{m}$

从图6可以看出,夹杂物颗粒在钢液中的上浮过程可以分为两个阶段:加速上浮阶段和稳定上浮阶段.在加速上浮阶段,颗粒所受钢液的黏滞阻力随上浮速度的增加而增加,因而上浮加速度逐渐减小,直至夹杂物颗粒达到稳定上浮阶段.夹杂物颗粒尺寸越小,其上浮达到稳定所需的时间越短,颗粒尺寸越大,其稳定上浮速度越大.同时,球形夹杂物颗粒的上浮速度可以使用 Stokes 定律进行计算.将不同尺寸夹杂物颗粒

2 模拟结果与讨论

2.1 数值算法和流-固耦合模型验证

铝由于其较强的脱氧能力,现已成为冶炼低氧钢和超低氧钢最常见的脱氧剂之一.因此,本研究选择固态氧化铝夹杂物颗粒作为研究对象.为了验证本文所采用的格子 Boltzmann 法及流-固耦合模型的可靠性,首先模拟静止钢液中直径 $d = 40 \mu\text{m}$ 及 $d = 80 \mu\text{m}$ 球状 Al_2O_3 夹杂物的上浮过程.图5为不同尺寸夹杂物颗粒上浮达到稳定时,模拟区域 $Y-Z$ 中心对称面上钢液速度分布图.

从图5可以看出,对于不同尺寸的夹杂物颗粒来说,夹杂物颗粒的尺寸越大,夹杂物颗粒的终点上浮速度越大.并且由于夹杂物颗粒表面和钢液之间采用无滑移边界条件,夹杂物颗粒周围钢液的速度分布也是相似的,即靠近夹杂物周围位置处钢液速度较大,远离夹杂物颗粒处钢液速度较小,直至夹杂物颗粒的运动不会对钢液流场产生影响.夹杂物颗粒所受钢液黏滞阻力的方向与夹杂物颗粒和钢液相对运动速度的方向相反,夹杂物颗粒达到稳定上浮时,其所受重力、浮力和钢液黏滞阻力达到平衡.图6为模拟得到的不同尺寸夹杂物颗粒在钢液中的上浮速度随时间变化的关系.

上浮速度理论计算值和模拟结果进行对比.由对比结果可以看出不同尺寸夹杂物颗粒上浮速度的理论计算值和模拟结果基本一致,表明本文所采用的格子 Boltzmann 方法和流-固耦合模型,能够较为精确有效地对固相夹杂物颗粒在钢液中上浮运动行为进行研究.

2.2 夹杂物颗粒之间上浮过程中的碰撞

上浮碰撞是钢液中夹杂物颗粒之间主要的碰撞凝聚方式之一.对于小尺寸的夹杂物颗粒来说,其上浮

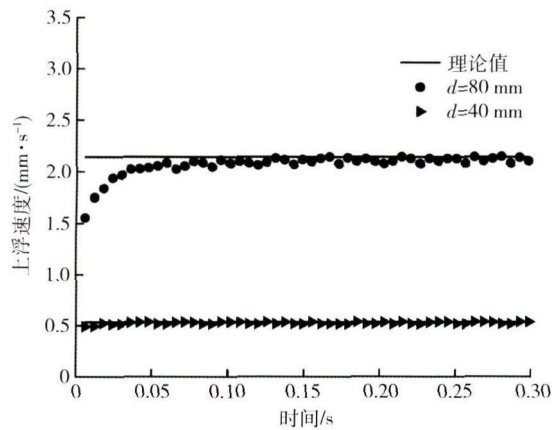


图6 不同尺寸夹杂物颗粒上浮速度随时间的变化关系

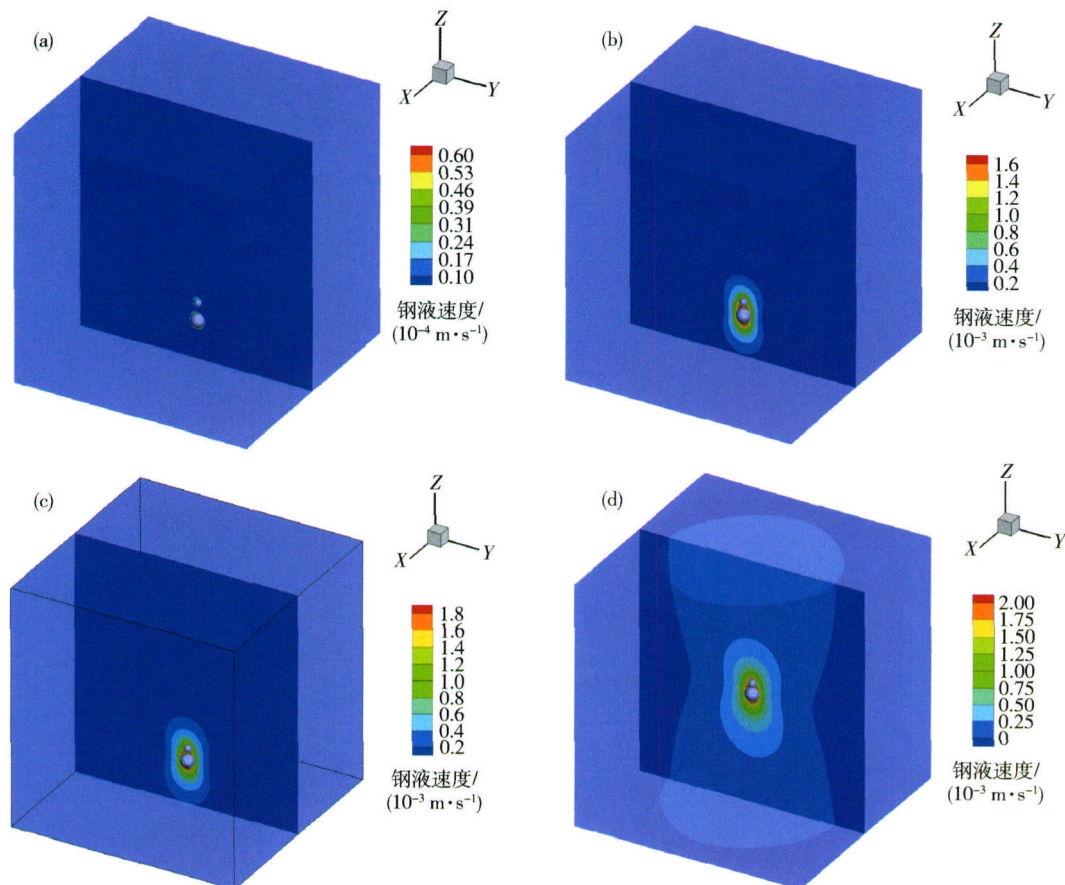
Fig. 6 Floating velocity of inclusions with different sizes as a function of time

速度较慢,与其他尺寸夹杂物颗粒碰撞凝聚长大后,能够加速其在钢液中的上浮去除。但是至今很少有人对夹杂物颗粒之间的上浮碰撞凝聚过程,以及碰撞凝聚后形成的复杂形貌夹杂物的上浮速度进行较为深入的研究。上一节对 $d = 40 \mu\text{m}$ 和 $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒

在钢液中上浮过程进行模拟研究,验证数值方法的有效性,并得到其在钢液中上浮时的速度变化规律。本节将继续以 $d = 40 \mu\text{m}$ 和 $d = 80 \mu\text{m}$ 固态球形氧化铝夹杂物颗粒为研究对象,应用格子 Boltzmann 方法对其在钢液中的上浮碰撞凝聚过程进行研究。图 7 为 $d = 40 \mu\text{m}$ 和 $d = 80 \mu\text{m}$ 夹杂物颗粒上浮碰撞凝聚过程中模拟区域中心 $Y-Z$ 对称面上的速度分布。

从图 7 可以看出:当 $t = 1.22 \times 10^{-4} \text{ s}$ 即上浮开始时, $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒位于 $d = 40 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒的正下方,但 $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒上浮速度较快,因此随着上浮的进行,两个颗粒之间的距离不断缩小;当 $t = 0.85 \text{ s}$ 时, $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒已经追赶上 $d = 40 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒,并发生碰撞后一起向上运动。图 8 为两种尺寸夹杂物颗粒单独上浮及一起上浮并发生碰撞的情形下,夹杂物颗粒上浮速度随时间的变化关系。

从图 8 可以看出,两种尺寸夹杂物颗粒单独上浮时上浮速度随时间的变化关系与两者一起上浮并发生碰撞时差别较大。在两者一起上浮的情况下,随着时间的延长,两者的上浮速度都逐渐增大,但是位于下方

图7 夹杂物上浮过程中模拟区域中心 $Y-Z$ 对称面上不同时刻的流场速度分布。(a) $t = 1.22 \times 10^{-4} \text{ s}$; (b) $t = 0.02 \text{ s}$; (c) $t = 0.03 \text{ s}$; (d) $t = 0.85 \text{ s}$ Fig. 7 Velocity distributions in the $Y-Z$ symmetry plane of the computational domain at different times in the inclusion floating process: (a) $t = 1.22 \times 10^{-4} \text{ s}$; (b) $t = 0.02 \text{ s}$; (c) $t = 0.03 \text{ s}$; (d) $t = 0.85 \text{ s}$

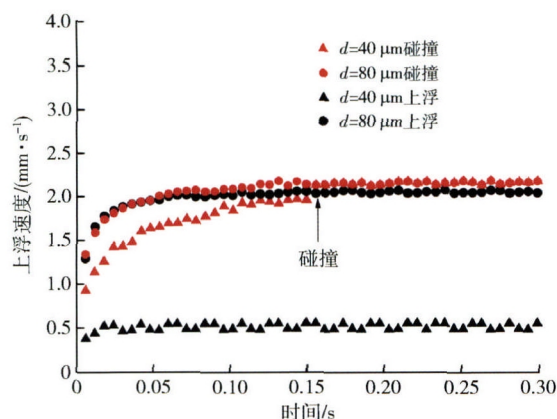


图8 单独上浮及发生上浮碰撞两种情形下夹杂物颗粒上浮速度随时间的变化关系

Fig. 8 Change in inclusion floating velocity with time under the condition of floating lonely and collision in the floating process

的 $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒的上浮速度大于正上方的 $d = 40 \mu\text{m}$ 的上浮速度,因此两者之间的距离不断缩小,直至发生碰撞,并且形成一个较大尺寸复杂形貌夹杂物后以相同的速度向上运动,如图 7(d) 和图 8 所示。同时相比于两者单独上浮,在二者一起上浮情况下,较小尺寸夹杂物颗粒即 $d = 40 \mu\text{m}$ 在上浮过程中速度增加更为显著,这是由于下部 $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒上浮速度较快,其在上浮的过程中会带动周围钢液的运动,当 $d = 80 \mu\text{m}$ 的氧化铝颗粒不断接近 $d = 40 \mu\text{m}$ 氧化铝颗粒时,钢液会对上方 $d = 40 \mu\text{m}$ 夹杂物颗粒起到加速上浮的作用,直至两者发生碰撞后一起上浮。并且形成的凝聚体的上浮速度明显大于两种尺寸夹杂物颗粒单独上浮时的上浮速度,如图 8 所示,对于 $d = 40 \mu\text{m}$ 的夹杂物来说,形成凝聚体后的上浮速度比单独上浮时增加 300%。因此实际炼钢过程中,采取必要的措施增加夹杂物颗粒之间上浮过程中的碰撞凝聚,对于提高夹杂物颗粒的上浮速度,尤其是小尺寸夹杂物上浮去除速度,具有重要的意义。

3 结论

(1) 不同尺寸夹杂物颗粒上浮速度的模拟结果和理论值基本一致,表明本文所采用的数值算法能够精确有效地对钢液中固相夹杂物颗粒运动进行研究。

(2) 当钢液中 $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒位于 $d = 40 \mu\text{m}$ 的下方并一起上浮时, $d = 80 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒会逐渐追上 $d = 40 \mu\text{m}$ 的夹杂物颗粒并发生碰撞后形成复杂形貌凝聚体,凝聚体的上浮速度显著大于二者单独上浮时的上浮速度。对于 $d = 40 \mu\text{m}$ 的夹杂物来说,形成凝聚体后的上浮速度比单独上浮时增加 300%。

(3) 实际炼钢过程中,采取必要的措施增加夹杂物颗粒之间上浮过程中的碰撞凝聚,对于提高夹杂物

颗粒的上浮速度,尤其是小尺寸夹杂物上浮去除速度,提高钢液的洁净度具有重要的意义。

参 考 文 献

- [1] Rege R A, Szekeres E S, Forgeng W D. Three-dimensional view of alumina clusters in aluminum-killed low-carbon steel. *Metall Mater Trans B*, 1970, 1(9): 2652
- [2] Doo W C, Kim D Y, Kang S C, et al. Measurement of the 2-dimensional fractal dimensions of alumina clusters formed in an ultra low carbon steel melt during RH process. *ISIJ Int*, 2007, 47(7): 1070
- [3] Tozawa H, Kato Y, Sorimachi K, et al. Agglomeration and floatation of alumina cluster in molten steel. *ISIJ Int*, 1999, 39(5): 426
- [4] Zhang B W, Li B W, Liu Z X. Mathematical simulation to the moving trajectory of inclusion particles of tundish in continuous casting process. *J Baotou Univ Iron Steel Technol*, 1999, 18(2): 125
- (张邦文, 李保卫, 刘中兴. 连铸中间包钢液中夹杂物颗粒运动轨迹的数值模拟. 包头钢铁学院学报, 1999, 18(2): 125)
- [5] Zhang B W, Deng K, Lei Z S, et al. A mathematical model on collision and removal of inclusion particles in continuous casting tundish. *Acta Metall Sin*, 2004, 40(6): 623
- (张邦文, 邓康, 雷作胜, 等. 连铸中间包中夹杂物聚合与去除的数学模型. 金属学报, 2004, 40(6): 623)
- [6] Lei H, He J C. A dynamic model of alumina inclusion collision growth in the continuous caster. *J Non Cryst Solids*, 2006, 352(36-37): 3772
- [7] Ladd A J C. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation: Part 1. Theoretical foundation. *J Fluid Mech*, 1994, 271: 285
- [8] Ladd A J C. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation: Part 2. Numerical results. *J Fluid Mech*, 1994, 271: 311
- [9] Aidun C K, Lu Y, Ding E J. Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation. *J Fluid Mech*, 1998, 373: 287
- [10] Liou T M, Lin C T. Study on microchannel flows with a sudden contraction-expansion at a wide range of Knudsen number using lattice Boltzmann method. *Microfluid Nanofluid*, 2014, 16(1): 315
- [11] Sun D K, Xiang N, Chen K, et al. Lattice Boltzmann modeling of particle inertial migration in a curved channel. *Acta Phys Sin*, 2013, 62(2): 391
- (孙东科, 项楠, 陈科, 等. 格子玻尔兹曼方法模拟弯流道中粒子的惯性迁移行为. 物理学报, 2013, 62(2): 391)
- [12] Li L, Zheng H, Luo X B. 3-dimensional lattice Boltzmann simulation of phosphor gel dispensing process in light emitting diodes. *Appl Math Mech*, 2014, 35(3): 264
- (李岚, 郑怀, 罗小兵. 大功率 LED 荧光粉硅胶点涂工艺的三维格子 Boltzmann 模拟. 应用数学与力学, 2014, 35(3): 264)