

# 基于等效耦合刚度的平面折展滑块机构分析

印思琪,邱丽芳<sup>✉</sup>,陈家兴,阳建宏

北京科技大学机械工程学院,北京 100083

✉ 通信作者, E-mail: qlf@ustb.edu.cn

**摘 要** 柔性铰链是实现平面折展柔顺机构运动的关键部分. 如何设计得到柔度好、精度高的柔性铰链一直是柔顺机构研究的关键问题. 综合考虑影响平面折展机构铰链刚度和精度特性的等效弯扭及拉压刚度,以 LET 铰链为例,分析在不同载荷下各个参数对弯扭与拉压等效耦合刚度的影响趋势,从而提出弯扭与拉压等效耦合刚度的概念. 通过大量的实例计算和分析,推导出 LET 铰链弯扭与拉压等效耦合刚度的经验公式. 基于等效耦合刚度经验公式,对平面折展柔顺滑块机构进行分析. 应用等效耦合刚度公式与不应用等效耦合刚度公式两种情况的分析结果和有限元仿真结果表明,应用等效耦合刚度经验公式的滑块位移计算精度得到很大的提高,验证了等效耦合刚度经验公式的适用性.

**关键词** 平面折展机构; 铰链; 刚度; 柔顺机构; 理论计算; 有限元法

**分类号** TH122

## Analysis of LEMs slider mechanisms based on equivalent coupling stiffness

YIN Si-qi, QIU Li-fang<sup>✉</sup>, CHEN Jia-xing, YANG Jian-hong

School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

✉ Corresponding author, E-mail: qlf@ustb.edu.cn

**ABSTRACT** The flexure hinge is the key part to implement the movement of lamina emergent mechanisms (LEM). Designing a flexure hinge with good flexibility and high accuracy is always the key problem to research compliant mechanisms. Considering the bending and tension equivalent stiffness comprehensively which influence the stiffness and accuracy characteristics of LEMs hinges and taking the LET hinge as an example, the effects of different parameters on bending and tension equivalent coupling stiffness are analyzed under different loads and the concept of bending torsion and tension compression coupling is introduced. Through the calculations and analyses of a large number of examples, an empirical formula of bending torsion and tension compression equivalent coupling stiffness is derived for the LET flexure hinge. The LEMs slider mechanism is studied based on equivalent coupling stiffness. By the comparison of theoretical calculation and simulation results, the calculating accuracy of the slider's displacement is proved to be improved by the application of the equivalent coupling stiffness formula, and thus the applicability of the equivalent coupling stiffness formula is verified.

**KEY WORDS** lamina emergent mechanisms; hinges; stiffness; compliant mechanisms; theoretical calculations; finite element method

以尽可能少的构件实现复杂的动作,以尽可能小的占用空间完成精密的运动过程是现代机构学中重要的创新思想<sup>[1]</sup>. 平面折展机构(lamina emergent mechanisms, LEMs)是由二维平面加工而成实现三维运动的

新型柔顺机构<sup>[2-3]</sup>. 体积小、制造简单、成本低、运输方便等优点<sup>[4]</sup>使得 LEMs 机构存在广阔的发展空间. 文献[5]基于刚体替代综合法<sup>[6]</sup>设计了一个以高平行度的双四边形机构为提升平台的 LEMs 机构,文献[7]设

计了细胞夹持 LEMs 机构,文献[8]设计了多种球面 LEMs 机构。

柔性铰链是柔顺机构的关键组成部分,柔顺机构的研究主要集中在柔性铰链上<sup>[9]</sup>。文献[10]设计了外 LET 与内 LET 铰链,并推导出其等效刚度公式;文献[11]提出了 TUFF 铰链和 RUFF 铰链;文献[12-13]分别提出圆环形铰链与 S 形铰链;Wilding<sup>[14]</sup>对不同 LEMs 铰链的性能进行了分析;文献[15-17]从不同的方面分析了铰链的柔度和精度特性问题。研究发现柔性铰链在机构运作中会同时承受弯扭载荷与拉压载荷,单独考虑拉压载荷或者弯扭载荷对机构的运动精度分析会产生较大偏差,尤其是拉压方向的变形会使转动中心发生漂移,导致设计的机构不能准确的满足性能要求,所以有必要对柔性铰链的弯扭与拉压等效耦合刚度作进一步研究。

基于此,本文以 LET 铰链为例对弯扭与拉压等效耦合刚度进行初步的分析研究,通过大量的实例分析,得到 LET 铰链弯扭与拉压等效耦合刚度的经验公式,并应用该经验公式对 LEMs 滑块机构进行分析研究。

## 1 LET 铰链等效耦合刚度的分析

### 1.1 LET 铰链承受耦合载荷状况的分析

为探究 LET 铰链在扭转过程受到拉压载荷的影响情况,设计 LET 铰链,尺寸如图 1 所示,对 LET 铰链弯扭过程中存在拉压载荷与不存在拉压载荷两种情况进行分析研究。图 1 中  $t$  表示铰链厚度;  $L_{BL}$  和  $L_{TL}$  分别表示柔性铰链的弯曲片段和扭转片段的长度;  $L_{BW}$  和  $L_{TW}$  分别表示柔性铰链的弯曲片段和扭转片段的宽度;  $d$  表示梁的宽度。假设力  $F$  的方向始终与梁方向相同。

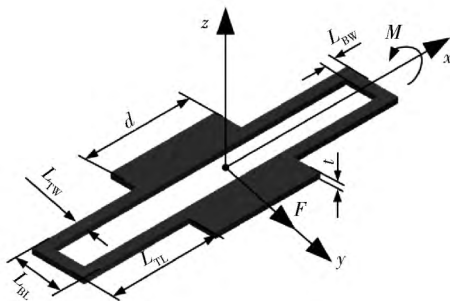


图 1 LET 柔性铰链尺寸示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the LET flexure hinge

铰链基本尺寸如表 1,材料选择铍青铜,弹性模量  $E = 128 \text{ GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.35$ 。

表 1 LET 铰链的参数值

Table 1 Parameter values of the LET hinge

| mm       |          |          |          |     |     |
|----------|----------|----------|----------|-----|-----|
| $L_{TL}$ | $L_{TW}$ | $L_{BL}$ | $L_{BW}$ | $d$ | $t$ |
| 35       | 3        | 10       | 5        | 20  | 0.8 |

根据 Howell 等提出的 LET 柔性铰链的扭转等效刚度公式  $k_{eq}$  为

$$k_{eq} = \frac{2k_T^2 k_B}{k_T^2 + 2k_T k_B} \quad (1)$$

其中  $k_T$  为扭转片段扭转刚度系数,  $k_B$  为弯曲片段弯曲刚度系数,

$$k_T = \frac{L_{TW} G t^3 \left( \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{L_{TW}} \right)}{L_{TL}} \quad (2)$$

$$k_B = \frac{EI_B}{L_{BL}} \quad (3)$$

式中  $G$  为剪切模量,  $I_B$  为梁的惯性矩。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad I_B = \frac{L_{BW} t^3}{12} \quad (4)$$

将式(2)~式(4)代入式(1),整理得到

$$k_{eq} = \frac{2EGI_B L_{TW} t^3 \left( \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{L_{TW}} \right)}{GL_{BL} L_{TW} \left( \frac{1}{3} - 0.21 \frac{t}{L_{TW}} \right) + 2EI_B L_{TL}} \quad (5)$$

其中  $E$  为材料弹性模量,  $\nu$  为材料泊松比,其余参数符号和意义见图 1 和表 1。

根据式(5)计算不同转矩下外 LET 铰链转角的理论值,如表 2 最后一行所示。在 ABAQUS 中建立表 1 所示实例的有限元仿真模型,同时施加如图 1 所示的转矩  $M$  以及跟随 LET 铰链转角变化的力  $F$ ,  $M = 500 \text{ N} \cdot \text{mm}$ ,  $F = 20 \text{ N}$  时转角变形云图如图 2 所示。通过有限元仿真得到同时施加集中力和转矩作用下 LET 柔性铰链的转角仿真值,如表 2 所示。

由表 2 可以看出,LET 铰链在仅有转矩作用下发生弯曲变形时,得到的转角仿真值与理论值基本一致,LET 铰链的刚度在铰链变形范围内基本不变,说明扭转等效刚度公式在拉力为零的情况下适用。

由表 2 绘制曲线图,如图 3 所示。

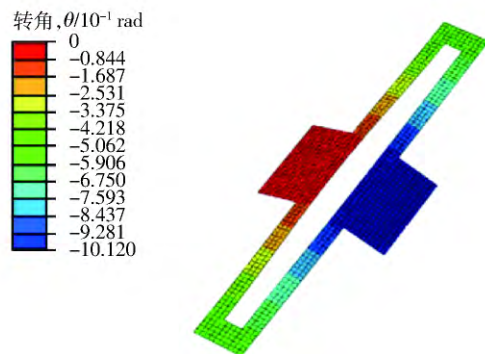


图 2 LET 柔性铰链的角位移云图

Fig. 2 Angular displacement nephogram of the LET flexure hinge

铰链在转矩作用下产生转角的仿真值与理论值之间的误差为

表 2 弯扭与拉压耦合作用下 LET 转角的仿真值

Table 2 Simulation values of the bending rotation angle of the LET under the coupling pressure of bending torsion and tension compression rad

| 拉力 ,<br><i>F</i> /N | 转矩 <i>M</i> /( N·mm) |        |        |        |        |        |        |       |        |        |
|---------------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
|                     | 100                  | 200    | 300    | 400    | 500    | 600    | 700    | 800   | 900    | 1000   |
| 0                   | 0.1904               | 0.3808 | 0.5712 | 0.7615 | 0.9518 | 1.142  | 1.332  | 1.522 | 1.712  | 1.902  |
| 5                   | 0.1945               | 0.3890 | 0.5833 | 0.7774 | 0.9713 | 1.165  | 1.358  | 1.552 | 1.744  | 1.937  |
| 10                  | 0.1981               | 0.3961 | 0.5936 | 0.7909 | 0.9880 | 1.185  | 1.382  | 1.578 | 1.774  | 1.969  |
| 15                  | 0.2011               | 0.4019 | 0.602  | 0.8020 | 1.002  | 1.202  | 1.401  | 1.601 | 1.800  | 1.998  |
| 20                  | 0.2035               | 0.4064 | 0.6085 | 0.8104 | 1.012  | 1.215  | 1.417  | 1.62  | 1.822  | 2.024  |
| 25                  | 0.2052               | 0.4096 | 0.6129 | 0.8161 | 1.020  | 1.224  | 1.429  | 1.634 | 1.84   | 2.046  |
| 30                  | 0.2063               | 0.4115 | 0.6153 | 0.8187 | 1.023  | 1.228  | 1.434  | 1.643 | 1.853  | 2.063  |
| 35                  | 0.2067               | 0.4120 | 0.6153 | 0.8179 | 1.021  | 1.226  | 1.433  | 1.644 | 1.858  | 2.073  |
| 0 (理论)              | 0.1916               | 0.3832 | 0.5749 | 0.7665 | 0.9581 | 1.1497 | 1.3414 | 1.533 | 1.7246 | 1.9162 |

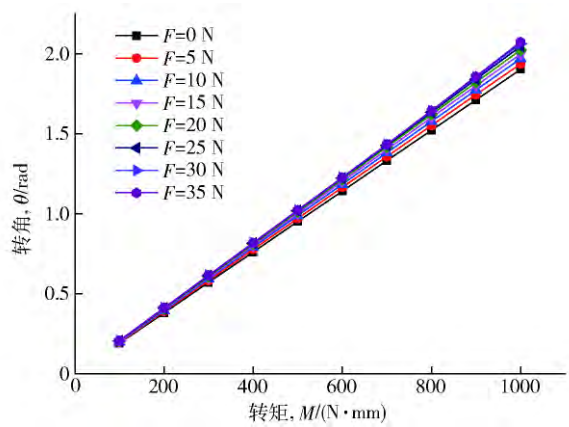


图 3 LET 铰链在不同拉力值下转矩与转角关系曲线  
Fig. 3 Torque and angle relation curve of the LET flexure hinge at different tension values

$$\alpha = \frac{\theta_A - \theta_{eq}}{\theta_{eq}} \times 100\% . \tag{6}$$

式中  $\theta_A$  为转角仿真值  $\theta_{eq}$  为转角理论值.

由表 2 数据以及图 3 可知 ,LET 铰链扭转时 ,拉力会对其产生很大的影响. 在同等转矩下施加拉力 ,由于拉力方向的变化 ,转动中心漂移 ,导致转角变大. 随着拉力逐渐增大 ,转角计算值与仿真值的误差也逐渐增大. 根据式( 6) 计算可知 ,当拉力为 35 N ,转矩为 100 N·mm 时 ,转角仿真值误差将达到 7.88% .

因此 ,由施加拉力会引起铰链转角的变化可以得出 ,拉力对铰链的扭转刚度存在着影响 ,拉力会改变铰链的扭转刚度 ,使得在同等扭矩作用下铰链转角改变. 所以设计及分析 LET 时 ,需要考虑弯扭与拉压的综合作用 ,即弯扭与拉压等效耦合刚度.

1.2 LET 铰链承受耦合载荷状况的分析

由 1.1 节的分析得到 ,拉力对 LET 铰链的弯扭等效刚度产生很大影响. 对 LET 铰链施加水平拉力后 ,转矩与转角曲线呈线性关系 ,说明拉力对 LET 铰链的

弯扭等效刚度的影响是固定的 ,即施加固定的拉力会对弯扭等效刚度产生固定的影响. 由于施加拉力后 LET 铰链不只产生扭转还会有拉伸 ,因此需要求解铰链同时受拉力和弯矩情况下的刚度 ,即弯扭与拉压等效耦合刚度.

为探究拉力对等效耦合刚度的影响 ,对表 2 中数据进行处理 ,得到在不同拉力下铰链弯扭与拉压等效耦合刚度值 ,在此给出拉力与相对应等效耦合刚度的曲线 ,如图 4 所示.

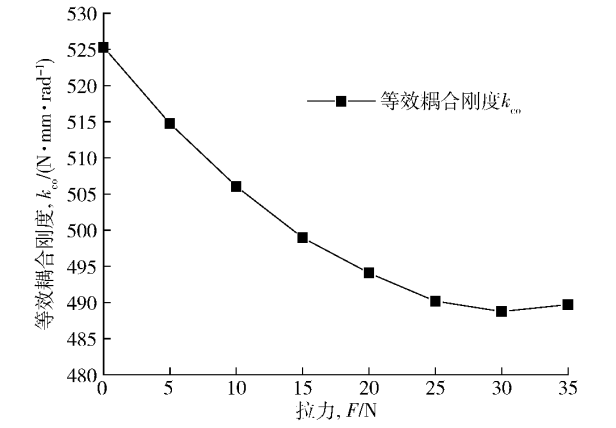


图 4 LET 铰链承受的拉力值与等效耦合刚度关系曲线  
Fig. 4 Force and equivalent coupling stiffness curve of the LET flexure hinge

引入符号  $k_{co}$  来表示弯扭与拉压等效耦合刚度 ,同时引入参数  $a$  和  $b$  表示拉力  $F$  对等效耦合刚度的影响程度 ,通过大量实例的仿真分析 ,得到等效耦合刚度  $k_{co}$  可以表示为拉力  $F$  的二次函数 ,即

$$k_{co} = k_{eq} + aF^2 + bF , \tag{7}$$

则转矩与转角关系可以表示为

$$M = k_{co} \theta = ( k_{eq} + aF^2 + bF ) \theta . \tag{8}$$

考虑到参数  $a$  和  $b$  的值与铰链尺寸直接有关 ,因此以表 1 铰链参数值为基础 ,改变铰链的宽度尺寸  $L_{BL}$

与长度尺寸  $L_{TL}$  得到不同的长宽比, 定义该长宽比为铰链的结构特征参数, 用符号  $\xi$  表示, 即  $\xi = L_{BL}/L_{TL}$ , 分析随着结构特征参数  $\xi$  的变化, LET 铰链等效耦合刚度经验公式中参数  $a$  和  $b$  的变化情况。

改变结构特征参数  $\xi$ , 取八组数据分别为 2.5、2.75、3.0、3.25、3.5、3.75、4 和 4.25, 仿真分析得到不同结构特征参数  $\xi$  下的  $a$  和  $b$  值如表 3 所示。

表 3 不同  $\xi$  下  $a$  和  $b$  值  
Table 3 Values of  $a$  and  $b$  at different  $\xi$  values

| $\xi$ | 2.5   | 2.75  | 3.0   | 3.25  | 3.5   | 3.75  | 4.0   | 4.25  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a$   | 0.021 | 0.021 | 0.028 | 0.028 | 0.028 | 0.028 | 0.028 | 0.028 |
| $b$   | -2.45 | -2.45 | -2.1  | -2.1  | -2.1  | -2.1  | -2.1  | -2.1  |

由表 3 中数据可得, 在铰链其他尺寸不变情况下,

表 4 LET 铰链等效耦合刚度的理论值、仿真值及其误差

Table 4 Finite element simulated and theoretically calculated equivalent coupling stiffness of LET flexure hinge and their relative error

| $\xi$ | 参量                                    | $F/N$ |       |       |       |       |       |       |
|-------|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       |                                       | 5     | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    | 35    |
| 2.5   | 刚度理论值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 577.2 | 565.9 | 555.8 | 546.5 | 538   | 530.6 | 524   |
|       | 刚度仿真值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 574.4 | 563.4 | 553.4 | 544.4 | 536.4 | 529.4 | 523.4 |
|       | 相对误差/%                                | 0.49  | 0.44  | 0.43  | 0.38  | 0.30  | 0.23  | 0.11  |
| 3     | 刚度理论值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 592.3 | 582.9 | 574.4 | 566.6 | 560   | 554   | 549.1 |
|       | 刚度仿真值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 589.5 | 581.1 | 574.1 | 568.5 | 564.3 | 561.5 | 560.1 |
|       | 相对误差/%                                | 0.47  | 0.31  | -0.05 | 0.34  | 0.77  | 1.35  | 2.00  |
| 3.5   | 刚度理论值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 516.2 | 507.7 | 500.4 | 494.2 | 489.3 | 485.8 | 484.4 |
|       | 刚度仿真值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 512.1 | 503.7 | 496.7 | 491.1 | 486.9 | 484.1 | 482.7 |
|       | 相对误差/%                                | 0.79  | 0.79  | 0.74  | 0.63  | 0.49  | 0.35  | 0.35  |
| 4     | 刚度理论值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 509.1 | 501.9 | 495.6 | 490.7 | 487.4 | 485.9 | 487.1 |
|       | 刚度仿真值/( $N \cdot mm \cdot rad^{-1}$ ) | 503.7 | 495.3 | 488.3 | 482.7 | 478.5 | 475.7 | 474.3 |
|       | 相对误差/%                                | 1.06  | 1.32  | 1.47  | 1.63  | 1.83  | 2.10  | 2.63  |

由表 4 数据绘制曲线, 如图 5 所示。由表 4 与图 5 可以得到在弯扭与拉压耦合作用下 LET 铰链发生扭转时, 通过有限元仿真得到的刚度与利用公式得到的刚度基本一致, 最大误差为 2.63%, 发生在  $\xi = 4.0$  时。这是因为在  $\xi = 4.0$  时铰链柔度很大, 会产生较大的中心漂移, 但误差仍在允许范围内, 验证了理论公式的正确性。

## 2 平面折展滑块机构的分析

### 2.1 滑块机构公式推导

为进一步验证等效耦合刚度的适用性, 将等效耦合刚度经验公式应用到机构分析中, 为此设计平面折展滑块机构如图 6 所示。该平面折展滑块机构的伪刚体模型如图 7 所示。

利用虚功原理对图 7 所示伪刚体滑块机构建立虚

当特征参数  $\xi$  为 2.5 至 2.75 时, 等效耦合刚度公式为

$$k_{co} = k_{eq} + 0.021F^2 - 2.45F; \quad (9)$$

当特征参数  $\xi$  为 3.0 至 4.25 时, 等效耦合刚度公式为

$$k_{co} = k_{eq} + 0.028F^2 - 2.1F. \quad (10)$$

### 1.3 有限元仿真与验证

为进一步验证等效耦合刚度经验公式及其参数  $a$  和  $b$  的正确性, 选取铍青铜材料作为 LET 铰链材料, 改变  $L_{TL}$  及  $L_{BL}$ , 取  $\xi$  分别为 2.5、3.0、3.5 和 4.0, 其余铰链尺寸如表 1。通过有限元仿真得到具有不同特征参数  $\xi$  的 LET 铰链在不同拉力作用下的等效耦合刚度, 同时根据表 3 得到不同特征参数  $\xi$  下  $a$  和  $b$  的值, 用等效耦合刚度公式(9)与式(10)计算得到 LET 铰链理论等效耦合刚度。有限元仿真得到的等效耦合刚度与理论计算得到等效耦合刚度及其对比如表 4 所示。

功方程得到

$$\delta W = F\delta z_i + M\delta\theta_1 + \sum_{i=1}^3 T_i\delta\psi_i. \quad (11)$$

式中,  $W$  为虚功,  $F$  为作用在滑块上的力,  $M$  为作用在杆  $r_2$  上的力矩,  $T_i$  为特征铰链  $i$  处的力矩。

$$T_i = -k_i\psi_i, \quad (12)$$

$$\psi_1 = \theta_1 - \theta_{10}, \quad (13)$$

$$\psi_2 = (\theta_1 - \theta_{10}) - (\theta_2 - \theta_{20}), \quad (14)$$

$$\psi_3 = \theta_2 - \theta_{20}. \quad (15)$$

式中,  $\theta_{10}$  为弹簧未变形时机构的位置角度,  $\theta_{10} = 0$ ,  $\theta_{20} = \pi$ 。

将式(12)和(13)代入式(11), 可以得到总虚功, 其表示为

$$\delta W = A\delta\theta_1 + B\delta\theta_2. \quad (16)$$

在式(16)中  $A$  和  $B$  分别为

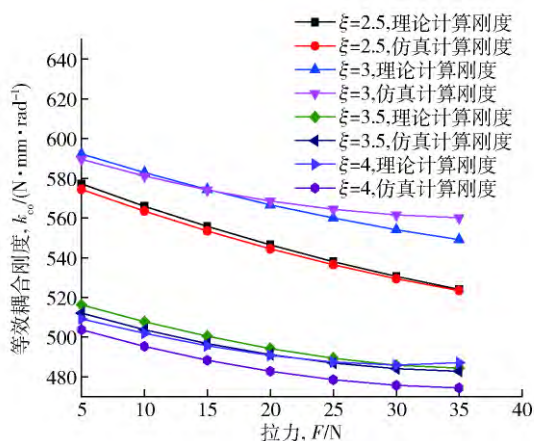


图 5 LET 铰链等效耦合刚度的理论值与仿真值曲线

Fig. 5 Theoretical calculated and simulated values of the equivalent coupling stiffness of the LET flexure hinge

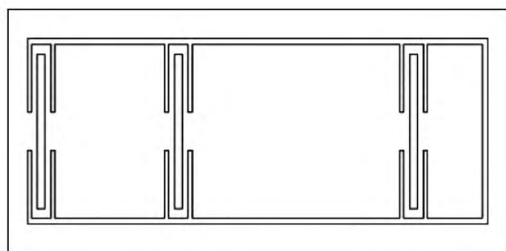


图 6 LEMS 滑块机构

Fig. 6 LEMS slider mechanism

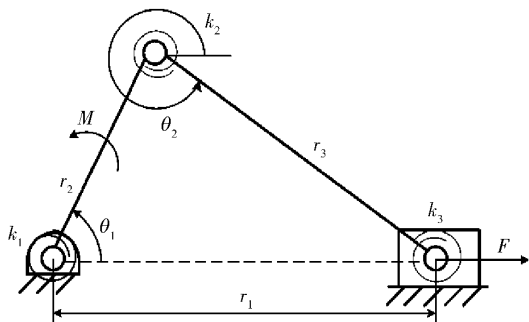


图 7 平面折展滑块机构的伪刚体模型

Fig. 7 Pseudo-rigid-body model of the LEMS slider mechanism

$$A = -r_2 F \sin \theta_1 + M + T_1 + T_2, \quad (17)$$

$$B = -r_3 F \sin \theta_2 - T_2 + T_3. \quad (18)$$

由机构的几何关系可以得出

$$r_2 \sin \theta_1 = -r_3 \sin \theta_2. \quad (19)$$

对式(16)求导, 得

$$d\theta_2 = -\frac{r_2 \cos \theta_1}{r_3 \cos \theta_2} d\theta_1. \quad (20)$$

将式(12)~式(20)代入式(11), 得

$$-r_2 F \sin \theta_1 + M + T_1 + T_2 -$$

$$\frac{r_2 \cos \theta_1}{r_3 \cos \theta_2} (-r_3 F \sin \theta_2 - T_2 + T_3) = 0. \quad (21)$$

滑块位移  $s$  为

$$s = r_2 + r_3 - (r_2 \cos \theta_1 + r_3 \cos \theta_2). \quad (22)$$

## 2.2 有限元分析

对图 6 所示滑块机构进行有限元仿真分析, 选取铍青铜材料, 其余尺寸如图 8 所示. 根据伪刚体模型, 可以得到滑块机构的杆长为  $r_2 = 70 \text{ mm}$ 、 $r_3 = 120 \text{ mm}$ . 其中, LET 柔性铰链的几何参数尺寸如表 1. 将各参数代入式(1)~式(3)中得到 LET 铰链的等效刚度为  $k_1 = k_2 = k_3 = 521.8 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

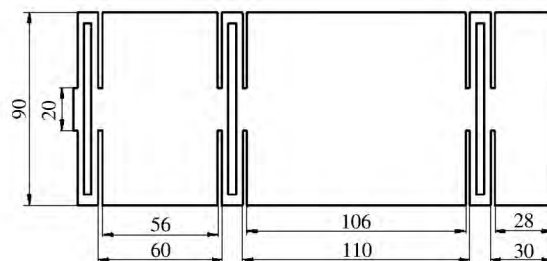


图 8 LEMS 滑块机构尺寸(单位: mm)

Fig. 8 Dimension of the LEMS slider mechanism (unit: mm)

将以上数据代入式(21)和式(22)中, 计算得到滑块的位移  $s$ , 同时进行有限元仿真, 得到滑块的仿真位移  $s'$ . 滑块理论计算位移  $s$ 、有限元仿真位移  $s'$  及其相对误差如表 5 所示. 图 9 为施加转矩  $M = 700 \text{ N} \cdot \text{mm}$  时 LEMS 滑块机构的位移云图.

表 5 LEMS 滑块机构滑块位移理论值与仿真值的比较

Table 5 Comparison between the theoretical and simulated displacement of the slider mechanism

| 转矩 $M/(\text{N} \cdot \text{mm})$ | 理论位移 $s/\text{mm}$ | 仿真位移 $s'/\text{mm}$ | 误差/%  |
|-----------------------------------|--------------------|---------------------|-------|
| 100                               | 0.1254             | 0.1376              | 9.73  |
| 200                               | 0.5023             | 0.5508              | 9.66  |
| 300                               | 1.1320             | 1.2417              | 9.69  |
| 400                               | 2.0170             | 2.2132              | 9.73  |
| 500                               | 3.1600             | 3.4702              | 9.82  |
| 800                               | 8.1960             | 9.0274              | 10.14 |
| 1000                              | 12.990             | 14.340              | 10.39 |

由表 5 数据可知, 基于 LET 铰链的滑块机构, 在相同载荷作用下, 滑块位移的理论值与仿真值存在较大偏差, 最大值达到 10.39%, 影响滑块机构的运动精度. 分析误差产生的原因, 可能是 LET 铰链在应用到机构后受到横向载荷作用, 改变铰链的转动刚度所致.

## 2.3 基于等效耦合刚度公式的滑块机构分析

将等效耦合刚度经验公式应用到滑块机构分析中, 由于经验公式与铰链受力有关, 因此首先对滑块机构进行受力分析, 如图 10 所示.

忽略滑块  $x$  方向受力, 则  $F_{43x} = 0$ . 构件 2 的平衡方程为

$$F_{12x} + F_{32x} = 0, \quad (23)$$



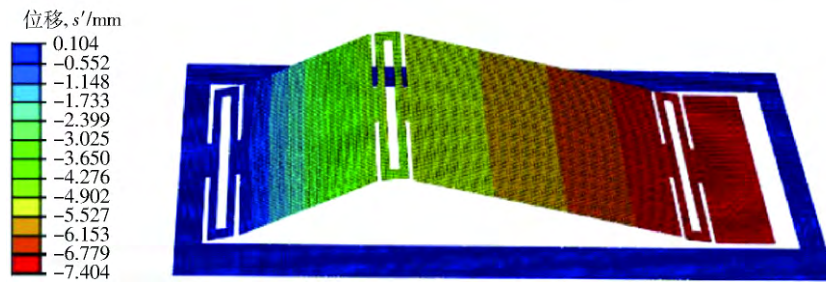


图9 LEMS 滑块机构位移云图

Fig. 9 Displacement nephogram of the LEMs slider mechanism

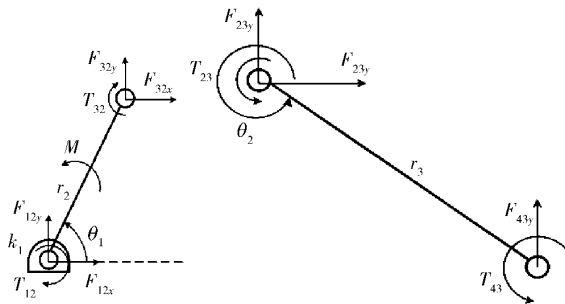


图10 LEMS 滑块机构力学分析示意图

Fig. 10 Schematic diagram of mechanical analysis of the LEMs slider mechanism

$$F_{12y} + F_{32y} = 0, \quad (24)$$

$$M + F_{32y}r_2 \cos \theta_1 - F_{32x}r_2 \sin \theta_1 - T_{12} - T_{32} = 0. \quad (25)$$

对构件3有

$$F_{23x} = 0, \quad (26)$$

$$F_{23y} + F_{43y} = 0. \quad (27)$$

$$T_{23} + T_{43} + F_{43y}r_3 \cos \theta_2 = 0, \quad (28)$$

其中  $T_{12} = -T_{32}$ ,  $T_{32} = T_{23} = -T_{2}$ ,  $T_{43} = -T_{3}$ .

联立方程(23) ~ 方程(28) 可求得

$$F_{12x} = F_{32x} = F_{23x},$$

$$F_{12y} = -F_{32y} = F_{23y} = -F_{43y} = 3.8 \text{ N}.$$

利用等效耦合刚度理论公式进行一次迭代可分别求得各个铰链的等效耦合刚度

$$k_{\text{co1}} = k_1 + a \left( \frac{F_{32y}}{\cos \theta_1} \right)^2 + b \frac{F_{32y}}{\cos \theta_1}, \quad (29)$$

$$k_{\text{co2}} = k_2 + a \left( \frac{F_{23y}}{\cos \theta_2} \right)^2 + b \frac{F_{23y}}{\cos \theta_2}, \quad (30)$$

$$k_{\text{co3}} = k_3 + a \left( \frac{F_{23y}}{\cos \theta_2} \right)^2 + b \frac{F_{23y}}{\cos \theta_2}. \quad (31)$$

其中  $a$  和  $b$  由表4查得. 将利用式(1) ~ 式(3) 及式(29) ~ 式(31) 计算得到的等效耦合刚度  $k_{\text{co1}}$ 、 $k_{\text{co2}}$  和  $k_{\text{co3}}$  替换  $k_1$ 、 $k_2$  和  $k_3$  代入公式(21) 和式(22), 进行一次迭代, 得到的滑块理论位移  $s$  与仿真位移  $s'$  及对比如表6所示.

由表6数据可以看出, 将等效耦合刚度公式运用到平面折展滑块机构中后, 误差在3%范围内, 能满足

表6 考虑等效耦合刚度后 LEMs 滑块机构滑块位移理论值与仿真值的比较

Table 6 Comparison between theoretical and simulated displacement of the slider mechanism considering equivalent coupling stiffness

| 转矩 $M/(N \cdot \text{mm})$ | 理论位移 $s/\text{mm}$ | 仿真位移 $s'/\text{mm}$ | 误差/% |
|----------------------------|--------------------|---------------------|------|
| 100                        | 0.128              | 0.1376              | 2.07 |
| 200                        | 0.512              | 0.5508              | 1.93 |
| 300                        | 1.154              | 1.2417              | 1.94 |
| 400                        | 2.057              | 2.2132              | 1.98 |
| 500                        | 3.230              | 3.4702              | 2.22 |
| 800                        | 8.372              | 9.0274              | 2.15 |
| 1000                       | 13.27              | 14.340              | 2.16 |

机构运动的精度要求. 通过与表5 滑块位移数据对比, 误差由10%左右降低到2%左右, 说明利用等效耦合刚度公式分析机构运动, 滑块位移理论值与仿真值更加接近. 同时, 由表5 与表6 数据可以看出滑块的理论位移  $s$  总是较仿真位移  $s'$  小, 主要原因是平面折展滑块机构在实现其功能过程中杆件也会发生很小的变形, 最终会反映到滑块位移上, 导致滑块仿真位移  $s'$  要大于理论位移  $s$ .

### 3 结论

(1) 通过弯扭与拉压耦合载荷对 LET 铰链变形特性影响的研究, 提出弯扭与拉压等效耦合刚度的概念. 通过大量仿真数据得出一定条件下弯扭与拉压等效耦合刚度的经验公式. 通过引入  $a$  和  $b$  表示拉力  $F$  与等效耦合刚度  $k_{\text{co}}$  之间的影响关系.

(2) 定义了 LET 铰链结构特征参数  $\xi$ , 通过分析得到 LET 铰链不同结构特征参数  $\xi$  下等效耦合刚度公式中参数  $a$  和  $b$  的经验值. 对随机选取的四组数据进行有限元仿真分析, 通过理论数据与仿真数据的对比验证了不同特征参数  $\xi$  下等效耦合刚度公式的适用性, 为进一步研究柔性铰链的等效耦合刚度提供参考.

(3) 将等效耦合刚度经验公式应用于 LEMs 滑块机构的分析, 对应用等效耦合刚度公式与不应用等效耦合刚度公式两种情况下的有限元仿真进行对比分

析,发现应用等效耦合刚度公式后滑块位移理论值与仿真值更加接近,进一步验证了等效耦合刚度的适用性。

## 参 考 文 献

- [1] Li R Q, Zou H J. Five methods for modern mechanism creative design. *Mech Sci Technol*, 2003, 22(1): 83  
(李瑞琴, 邹慧君. 现代机构的创新设计理论与方法研究. 机械科学与技术, 2003, 22(1): 83)
- [2] Midha A, Norton T W, Howell L L. On the nomenclature, classification, and abstractions of compliant mechanisms. *J Mech Des*, 1994, 116(1): 270
- [3] Albrechtsen N B, Magleby S P, Howell L L. Identifying potential applications for lamina emergent mechanisms using technology push product development // *ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Montreal, 2010: 513
- [4] Jacobsen J O, Winder B G, Howell L L, et al. Lamina emergent mechanisms and their basic elements. *J Mech Rob*, 2010, 2(1): 011003
- [5] Hu F, Qiu L F, Zhou J, et al. Design and analysis of bi-stable grasper mechanisms highly parallel to the ground. *Chin J Eng*, 2015, 37(4): 522  
(胡锋, 邱丽芳, 周杰, 等. 高平行度双稳态夹持机构设计与分析. 工程科学学报, 2015, 37(4): 522)
- [6] Yu J J, Pei X, Bi S S, et al. State-of-arts of design method for flexure mechanisms. *Chin J Mech Eng*, 2010, 46(13): 2  
(于靖军, 裴旭, 毕树生, 等. 柔性铰链机构设计方法的研究进展. 机械工程学报, 2010, 46(13): 2)
- [7] Teichert G H, Aten Q T, Easter M, et al. A metamorphic erectable cell restraint (MECR) // *ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Chicago, 2012: 197
- [8] Wilding S E, Howell L L, Magleby S P. Spherical lamina emergent mechanisms. *Mech Mach Theory*, 2011, 49(13): 187
- [9] Wang W J, Yu Y Q, Wang H W. Analysis on the research status of compliant mechanism at home and abroad. *J Mach Des*, 2007, 24(6): 1  
(王雯静, 余跃庆, 王华伟. 柔顺机构国内外研究现状分析. 机械设计, 2007, 24(6): 1)
- [10] Jacobsen J O, Chen G M, Howell L L, et al. Lamina emergent torsional (LET) joint. *Mech Mach Theory*, 2009, 44(11): 2098
- [11] Ferrell D B, Isaac Y F, Magleby S P, et al. Development of criteria for lamina emergent mechanism flexures with specific application to metals. *J Mech Des*, 2011, 133(3): 031009
- [12] Qiu L F, Wei Z H, Xu J W. Analysis of equivalent stiffness of new LEMs flexure hinge. *J Mech Eng*, 2014, 50(17): 25  
(邱丽芳, 韦志鸿, 徐金梧. 新型平面折展机构柔性铰链等效刚度分析. 机械工程学报, 2014, 50(17): 25)
- [13] Qiu L F, Meng T X, Zhang J Q, et al. Design and test of lamina emergent mechanisms S-shaped flexure hinge. *Trans Chin Soc Agric Mach*, 2015, 45(9): 324  
(邱丽芳, 孟天祥, 张九俏, 等. 平面折展机构S形柔性铰链设计与试验. 农业机械学报, 2014, 45(9): 324)
- [14] Wilding S E, Howell L L, Magleby S P. Introduction of planar compliant joints designed for combined bending and axial loading conditions in lamina emergent mechanisms. *Mech Mach Theory*, 2012, 56: 1
- [15] Xu W, King T G. Mechanical amplifier design for piezo-actuator applications // *IEE Colloquium on Innovative Actuators for Mechatronic Systems*. London, 1995: 1
- [16] Bi S S, Zong G H. Error sources analysis of flexure hinge mechanism. *Mech Sci Technol*, 2003, 22(4): 591  
(毕树生, 宗光华. 柔性铰链微操作机构的误差源分析. 机械科学与技术, 2003, 22(4): 591)
- [17] Chen G M, Jia J Y, Liu X Y, et al. Study on the accuracy of flexure hinges. *Chin J Sci Instrum*, 2004, 25(Suppl 2): 107  
(陈贵敏, 贾建援, 刘小院, 等. 柔性铰链精度特性的研究. 仪器仪表学报, 2004, 25(增刊2): 107)