工程科学学报,第 41 卷,第 9 期:1176-1186,2019 年 9 月
Chinese Journal of Engineering, Vol. 41, No. 9: 1176-1186, September 2019
DOI: 10.13374/j.issn2095-9389.2019.09.009; http://journals.ustb.edu.cn

具有状态约束与输入饱和的全向移动机器人自适应跟踪控制

郑文昊,贾英民✉

北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院,北京 100191
✉通信作者,E-mail: ymjia@buaa.edu.cn

摘　要　研究了全状态约束与输入饱和情况下的全向移动机器人轨迹跟踪控制问题. 首先,针对一类三轮驱动的全向移动机器人,考虑系统存在模型参数不确定与外部扰动,建立了运动学与动力学模型;其次,利用障碍 Lyapunov 函数,结合反步设计方法,有效处理全向移动机器人跟踪过程中存在的状态约束,保证所有状态变量不会超出状态约束的限制区域;然后,针对系统参数不确定和未知有界扰动,设计相应的自适应律进行处理;同时,提出一种抗饱和补偿器保证机器人输入力矩满足饱和约束;并且利用 Lyapunov 理论分析证明了当选取合适的控制参数时闭环系统中的所有信号均能保证一致有界;最后,通过与未考虑状态约束和输入饱和的控制器以及经典比例-微分控制器进行仿真对比,验证了该方法的有效性和鲁棒性.

关键词　全向移动机器人; 跟踪控制; 自适应控制; 状态约束; 输入饱和
分类号　TP242.6

Adaptive tracking control for omnidirectional mobile robots with full-state constraints and input saturation

ZHENG Wen-hao, *JIA Ying-min*✉

School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China
✉Corresponding author, E-mail: ymjia@buaa.edu.cn

ABSTRACT　The omnidirectional mobile robot (OMR), which is different from the two-wheeled differential drive mobile robots, can achieve three-degree-of-freedom motion in a plane with no non-holonomic constraint. Therefore, this type of robot has been widely used in many fields owing to its superior maneuverability and controllability. In practical applications, the trajectory tracking problem of the OMRs is a key issue that requires an urgent solution. The challenges with respect to the tracking performance can be categorized into the following: first, the parameter uncertainty of the OMR model and external disturbances affect the accuracy of the control. Second, on account of the limited workspace and the security requirements, the positions, attitudes, and speeds of the OMRs are subject to state constraints during the tracking process. Finally, the limited capability of the actuators can lead to input saturation, which will further degrade the tracking performance or even result in failure to track the desired trajectory. Thus, this study investigates the trajectory-tracking control problem of the OMRs with full-state constraints and input saturation. The kinematics and dynamics for a class of three-wheeled omnidirectional mobile robots were presented with the model uncertainties and external disturbance. Moreover, the barrier Lyapunov method was applied to handle the state constraints using the backstepping technique so that none of the state variables violated the restrictions. Meanwhile, adaptive control laws were designed to deal with the parameter uncertainties and unknown bounded disturbance. Moreover, an anti-windup compensator was adopted to ensure the input torque of the robot met the input constraints. The

收稿日期: 2019-01-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61327807, 61521091, 61520106010, 61134005); 国家重点基础研究发展规划资助项目(2012CB821200, 2012CB821201)

Lyapunov theory was used to prove that all the signals in the closed-loop system were uniformly bounded when the control parameters were selected suitably. Finally, using numerical simulations, the proposed robust adaptive controller was compared with other controllers, and the results verify the effectiveness and robustness of the proposed method.

KEY WORDS omnidirectional mobile robot; tracking control; adaptive control; state constraints; input saturation

全向移动机器人是不同于传统两轮差分机器人的一类特殊机器人,其在平面能够实现三自由度无约束运动,不存在非完整约束,因而具有更强的机动性和更好的可控性. 近年来,随着移动机器人技术的飞速发展,全向移动机器人获得了广泛关注,已经被应用于工业生产、物流运输、军事侦察、环境探测等各个方面[1]. 针对全向移动机器人的运动学与动力学建模问题,已进行了广泛研究[2−8];文献[5]考虑了一类四轮全向移动机器人运动学与动力学模型,提出了轨迹生成方法和控制器设计思路;Liu 等[6]建立了三轮驱动的机器人动力学模型,并基于轨迹线性化方法设计了控制器;Indiveri[7]研究了运动学模型及其控制方法;此外,一种基于动力学模型的 PI−模糊控制器在文献[8]中被提出;然而上述文献并未考虑在实际系统中广泛存在的参数不确定和外部干扰问题,这会使得控制器在实际应用中无法实现期望的控制性能.

全向移动机器人的轨迹跟踪是机器人在实际应用中需要解决的基本问题,目前多种控制策略如自适应技术、滑模控制、智能控制、模型预测控制以及多种方法的综合形式已经被广泛研究. 例如,Huang 与 Tsai[9]提出了一种具有参数变化和摩擦滑移不确定性的全向轮式移动机器人轨迹跟踪与稳定的自适应反步控制方法;王明明等[10]基于运动学模型提出了全向移动机器人的自适应滑模跟踪控制方法,具有较好的跟踪性能;Alakshendra 与 Chiddarwar[11]利用二阶滑模与自适应技术的结合,提出了一种新的自适应鲁棒二阶滑模控制方法,首次将高阶滑模控制方法应用到轮式移动机器人的轨迹跟踪控制中,并能有效处理摩擦、外力扰动和参数不确定;Xu 等[12]采用神经网络逼近机器人的未知参数模型,提出了一种自适应神经网络滑模控制器;康升征与吴洪涛[13]提出了一种基于全向移动机器人动力学模型的自适应模糊滑模控制器,通过设计模糊自适应律调整增益参数,有效缓解了控制输入抖振现象. 但是,状态约束和输入饱和问题在上述文献中均未得到研究. 在实际系统中,由于机器人运动空间限制、安全速度限制、电机执行器输入受限等问题,机器人的状态约束与输入饱和是广泛存在的现象,忽略此类限制约束,会导致所设计的控制器无法完成期望的跟踪性能,甚至导致机器人碰撞损毁或人员受伤,因此在实际应用中,必须研究具有状态约束和输入饱和的全向移动机器人轨迹跟踪控制方法.

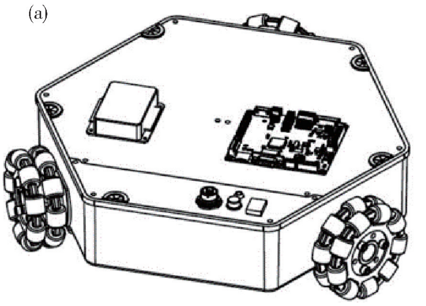
目前针对状态受限系统,障碍 Lyapunov 函数是一种有效处理状态约束与输出约束的工具[14];针对一类具有全状态约束的单输入单输出非线性系统,Liu 等[15]提出了基于反步法与障碍 Lyapunov 函数法的自适应控制方法;进一步,在文献[16]中,Liu 等将结果扩展到一类非线性纯反馈系统;Bai[17]针对一类直流电机驱动系统,基于神经网络技术,提出了满足全状态约束的自适应控制器;文献[18]基于径向基神经网络设计了自适应控制器,实现了多输入多输出非线性系统的时变状态约束;Ding 等[19]通过神经网络逼近未知的轮式机器人模型,提出了一种全状态受限的自适应神经网络控制器,能够实现两轮差分移动机器人对参考轨迹的有效跟踪;Wang 与 Wu[20]基于反步法提出了一种有限时间跟踪控制器,保证了一类严格反馈非线性系统的全状态约束,并且实现了闭环系统中所有信号的有限时间一致有界. 在真实系统中,电机等执行器的物理性能有限,机器人的输入力矩受限,需要在设计控制器考虑输入饱和. Chen 等[21]面向非完整约束机器人运动学特性,提出了速度菱形输入饱和限制,通过向量分解和时变反馈参数设计,实现了输入饱和情况下的机器人轨迹跟踪,相比传统矩形输入限制,提高了跟踪速度和性能;文献[22]提出了基于模型预测的输入约束跟踪控制器;Chen 等[23]通过设计辅助系统分析输入约束影响,基于命令滤波器提出了针对多输入多输出系统的抗饱和自适应控制方法;Wen 等[24]通过引入 Nussbaum 函数补偿输入饱和产生的非线性项,提出了两种鲁棒自适应控制算法. 综上所述,到目前为止,尚未有全向移动机器人在状态约束和输入饱和下轨迹跟踪控制的相关研究报道. 本文综合考虑了在实际应用中全向移动机器人存在的状态约束与输入饱和问题,一方面,针对全向移动机器人在轨迹跟踪过程中的安全性和运动空间要求,通过将状态约束条件引入到控制器设计过程中,保证了机器人的位置、姿态、速度等运动状态始终位于规定约束边界内,进而使得机器人能够高效安全作业;另一方面,通过设计抗饱和补偿器在满足状态约束情

况下进一步保证了执行器力矩始终满足输入饱和限制，避免了因执行器饱和导致的轨迹跟踪性能退化甚至于无法跟踪期望轨迹. 同时，本文为全向移动机器人高性能轨迹跟踪的实际应用提供了理论基础.

根据以上文献介绍，本文在基于文献[17-19]基础上，推导了三轮全向移动机器人的运动学与动力学模型，并考虑其存在参数不确定和外部扰动情况，利用障碍 Lyapunov 函数与反步法，保证在跟踪期望轨迹过程中，机器人运动状态始终不会违反系统状态约束，同时，设计了饱和补偿器，通过辅助系统补偿输入饱和产生的影响，并利用 Lyapunov 理论证明了所提出的自适应抗饱和跟踪控制器能够保证闭环系统中所有信号有界，最后，通过仿真计算与其他控制器比较，验证了所提出算法的鲁棒性和可靠性.

1　全向移动机器人模型

如图 1(a)所示，本文主要针对一类三轮驱动的全向移动机器人进行研究. 不同于传统两轮差分机器人存在非完整约束的情况，此类移动机器人通过三组全向轮，可以实现平面三自由度的无约束运动，能够进行横向、纵向及旋转运动，具有更好的机动性与可控性.



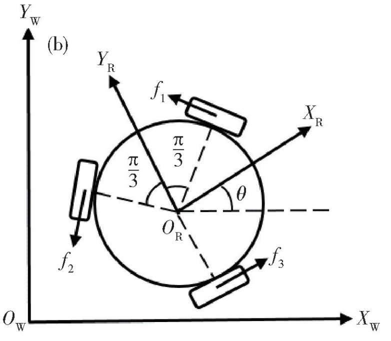


图 1　三轮全向移动机器人与受力分析. (a)机器人示意图；(b)受力分析

Fig. 1　Three-wheeled omnidirectional mobile robot and force analysis: (a) schematic of the robot; (b) force analysis

1.1　运动学模型

全向移动机器人的运动学模型如下式所示：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ \omega\end{pmatrix}\tag{1}$$

式中，$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{\theta}$ 是 x，y，θ 的微分，且 x，y，θ 分别表示图 1(b)所示的世界坐标系 $X_W O_W Y_W$ 下机器人质心 O_R 的横纵坐标以及与机器人坐标系 $X_R O_R Y_R$ 所成的夹角，v_x，v_y，ω 表示机器人的纵向速度、横向速度和旋转角速度. 进一步，机器人本体运动速度与三轮转速的变换关系可由下式给出.

$$\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ \omega\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}\tag{2}$$

式中，ω_i ($i=1,2,3$) 表示轮子 i 的转动角速度，r 是轮子半径，L 是机器人质心到轮子中心的垂线距离.

1.2　动力学模型

对全向移动机器人受力分析如图 1(b)所示，f_i ($i=1,2,3$) 表示第 i 个驱动轮产生的驱动力，驱动电机的输入力矩 τ_i ($i=1,2,3$) 与驱动力之间的关系可由直流电机方程导出，如式(3)所示：

$$I_w\dot{\omega}_i+c\omega_i=n\tau_i-rf_i\tag{3}$$

式中，I_w 是轮子的转动惯量，c 是粘滞摩擦系数，n 表示电机减速器的减速倍数. 假设所有驱动电机和全向轮具有相同的物理特性.

类似文献[2]的推导过程，机器人的受力分析如下式所示：

$$\begin{cases}m(\dot{v}_x-v_y\dot{\theta})=-\dfrac{1}{2}f_1-\dfrac{1}{2}f_2+f_3\\ m(\dot{v}_y+v_x\dot{\theta})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f_2\\ I_R\ddot{\theta}=L(f_1+f_2+f_3)\end{cases}\tag{4}$$

式中，m 和 I_R 分别表示机器人本体的质量和转动惯量.

综合式(1)~(4)，可得动力学模型如下所示：

$$\begin{pmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{\omega}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_1v_x\\ a_1v_y\\ a_3\omega\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\omega v_y\\ -a_2\omega v_x\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1 & -b_1 & 2b_1\\ \sqrt{3}b_1 & -\sqrt{3}b_1 & 0\\ b_2 & b_2 & b_2\end{pmatrix}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}^*\tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{d}^*=(d_1^*,d_2^*,d_3^*)^{\mathrm{T}}$ 是机器人受到的未知有界扰动，$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)^{\mathrm{T}}$ 是机器人输入力矩向量.

令 $\boldsymbol{q}_1=(x,y,\theta)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{q}_2=(v_x,v_y,\omega)^{\mathrm{T}}$，则全向移动机器人模型(1)和(5)可写成：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{q}}_1=\boldsymbol{J}(\theta)\boldsymbol{q}_2\\ \dot{\boldsymbol{q}}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2+a_2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_2)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}^*\end{cases}\tag{6}$$

模型中各参数表示如下所示：

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{-a_1,-a_1,-a_3\},$$
$$a_1=3c/(3I_{\mathrm{w}}+2mr^2),$$
$$a_2=2mr^2/(3I_{\mathrm{w}}+2mr^2),$$
$$a_3=3cL^2/(3I_{\mathrm{w}}L^2+I_{\mathrm{R}}r^2),$$
$$b_1=nr/(3I_{\mathrm{w}}+2mr^2),$$
$$b_2=krL/(3I_{\mathrm{w}}L^2+I_{\mathrm{R}}r^2),$$
$$\boldsymbol{J}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-b_1 & -b_1 & 2b_2\\ \sqrt{3}b_1 & -\sqrt{3}b_1 & 0\\ b_2 & b_2 & b_2\end{pmatrix},\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_2)=\begin{pmatrix}\omega v_y\\ -\omega v_x\\ 0\end{pmatrix}$$

式中，a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 是正常数；需要注意的是，由于机器人系统的物理参数如转动惯量、黏滞摩擦系数等测量具有误差，因此系统具有模型不确定性.

1.3 控制目标

在实际机器人系统中存在输入饱和现象，即机器人的输入力矩必须在有界范围内，可由如下公式表示：

$$\tau_i=\begin{cases}\tau_{i\max} & \tau_{i0}>\tau_{i\max}\\ \tau_{i0} & -\tau_{i\min}\leqslant\tau_{i0}\leqslant\tau_{i\max}\\ -\tau_{i\min} & \tau_{i0}<-\tau_{i\min}\end{cases}\quad i=1,2,3\tag{7}$$

式中，$\tau_{i\max}$，$-\tau_{i\min}$ 分别表示饱和约束的上界和下界，$\tau_{i0}(i=1,2,3)$ 是需要设计的控制输入，记 $\tau_i=\mathrm{sat}(\tau_{i0})$.

此外，在实际机器人运动过程中，由于空间限制或安全性考虑，机器人的运动范围和运动速度往往需要受到约束，即机器人存在状态受限情况，需要满足：

$$|q_{1i}|<\beta_{1i},|q_{2i}|<\beta_{2i}\quad(i=1,2,3)\tag{8}$$

式中，β_{1i}，β_{2i} 是正常数，表示状态的约束界限.

为方便跟踪控制器设计，以下提出三条合理的假设.

假设 1：对于给定的参考轨迹 $\boldsymbol{q}_{1\mathrm{r}}=(x_{\mathrm{r}},y_{\mathrm{r}},\theta_{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$ 及其相应参考速度 $\boldsymbol{q}_{2\mathrm{r}}=(v_{x\mathrm{r}},v_{y\mathrm{r}},\omega_{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$，需要满足相应的状态约束关系，即 $|q_{1\mathrm{r}i}|<\delta_{1i}$，$|q_{2\mathrm{r}i}|<\delta_{2i}(i=1,2,3)$，其中 δ_{1i}，δ_{2i} 是正常数；且参考模型的状态约束界应小于跟踪机器人的状态约束界，即满足 $\delta_{1i}<\beta_{1i}$，$\delta_{2i}<\beta_{2i}(i=1,2,3)$ 条件.

假设 2：全向移动机器人模型(6)存在物理参数未知情况，参数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 未知但有界.

假设 3：在实际系统中，机器人的运动速度 v_x，v_y，ω 存在未知上界满足条件：$|v_x|<p_1$，$|v_y|<p_2$，$|\omega|<p_3$，其中 p_1,p_2,p_3 是未知有界正常数. 系统受到的未知有界扰动满足 $\|\boldsymbol{d}^*\|<d$，其中 d 是未知正常数.

值得注意的是，在假设 3 中对运动速度的未知有界假设，是表示机器人的运动速度不可能无限大，必然存在某个未知上界，而状态受限约束(8)中是由于运动空间约束及安全性等原因而人为规定的约束界. 实际上，运动速度的未知上界 p_i 必然大于状态约束界 β_{2i}.

本文的控制目标是：在假设 1～3 下，考虑存在参数不确定和未知有界扰动情况，通过设计控制器使得机器人系统(6)能够实现对参考轨迹的跟踪，并满足输入饱和(7)和状态约束(8)，且所有闭环系统的信号均能保证有界.

2 控制器设计

为了设计满足状态约束和输入饱和的自适应跟踪控制器，先提出以下引理.

引理 1：对于任意正常数 $\varepsilon>0$ 和 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $0\leqslant|x|-x\tanh(\varepsilon x)\leqslant l/\varepsilon$ 恒成立，其中 l 是常数，且满足等式 $l=\mathrm{e}^{-(l+1)}$，$l\approx0.2785$.

引理 2[17]：对于任意正常数 $k\in\mathbf{R}^+$，当 $|x|<k$ 时，不等式 $\ln\dfrac{k^2}{k^2-x^2}\leqslant\dfrac{x^2}{k^2-x^2}$ 始终成立.

引理 3[25]：如果一个连续正定的 Lyapunov 函数 $V(x)$ 满足 $\kappa_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\kappa_2(\|x\|)$，其中 κ_1，κ_2 是 κ 类函数，且 $V(x)$ 满足 $\dot{V}(x)\leqslant-aV(x)+b$，其中 a，b 是正常数，则对于任意有界初始状态 $x(t_0)$，解 $x(t)$ 必将一致有界.

考虑全向移动机器人系统模型(5)，其给定参考轨迹为 $\boldsymbol{q}_{1\mathrm{r}}=(x_{\mathrm{r}},y_{\mathrm{r}},\theta_{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$，定义变量如下所示：

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_{1\mathrm{r}}=(z_{11},z_{12},z_{13})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{\alpha}=(z_{21},z_{22},z_{23})^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{\mathrm{T}}$ 是虚拟变量，其数学表达式随后给出.

利用反步法，首先取障碍 Lyapunov 函数如下：

$$V_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\ln\frac{k_{\mathrm{a}i}^2}{k_{\mathrm{a}i}^2-z_{1i}^2}\tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{K}_a=\mathrm{diag}\{k_{a1},k_{a2},k_{a3}\}$，$k_{ai}(i=1,2,3)$ 是正常数，其取值可由 $k_{ai}=\beta_{1i}-\delta_{1i}(i=1,2,3)$ 确定.

对 V_1 求导可得：

$$\dot{V}_1=\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{1i}\dot{z}_{1i}}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}\tag{11}$$

其中 $\dot{z}_1=\dot{\boldsymbol{q}}_1-\dot{\boldsymbol{q}}_{1r}=\boldsymbol{J}(\theta)\boldsymbol{q}_2-\dot{\boldsymbol{q}}_{1r}=\boldsymbol{J}(\theta)(z_2+\boldsymbol{\alpha})-\dot{\boldsymbol{q}}_{1r}$，设计虚拟变量 $\boldsymbol{\alpha}$ 如下所示：

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\theta)(\dot{\boldsymbol{q}}_{1r}-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{z}_1)\tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{K}_1=\mathrm{diag}\{k_{11},k_{12},k_{13}\}$，$k_{1i}(i=1,2,3)$ 是正常数.

进一步，式(11)代入 $\dot{z}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 表达式可得公式(13)：

$$\dot{V}_1=-\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{1i}z_{1i}^2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{1i}\boldsymbol{J}_i(\theta)z_2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}\tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{J}_i(\theta)$ 是矩阵 $\boldsymbol{J}(\theta)$ 的第 i 个行向量.

然后，取 Lyapunov 函数如下所示：

$$V_2=V_1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\ln\frac{k_{ai}^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\tag{14}$$

其中 $k_{bi}(i=1,2,3)$ 是正常数；对式(14)求导可得：

$$\dot{V}_2=\dot{V}_1+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}\dot{z}_{2i}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\tag{15}$$

根据机器人动力学模型结合式(9)可得 $\dot{z}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2+a_2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_2)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}^*-\dot{\boldsymbol{\alpha}}$.

为处理机器人动力学模型中参数不确定和未知扰动问题，定义未知正常数 $\theta_1=a_1,\theta_2=a_2,\theta_3=a_3$；输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中同样存在不确定参数，且由标称矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 与误差矩阵 $\Delta\boldsymbol{B}$ 构成，满足 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\Delta\boldsymbol{B}$；由于机器人存在输入饱和，故 $\|\boldsymbol{\tau}\|\leqslant\sqrt{3}\bar{\tau}$，$\bar{\tau}=\max\{\tau_{i\max},\tau_{i\min}(i=1,2,3)\}$；假设 $\|\Delta\boldsymbol{B}\|$ 存在未知上界，则 $\|\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}\|$ 存在未知上界 θ_4. 定义 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4$ 分别是正常数 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 的估计值，则估计误差定义为：$\tilde{\theta}_i=\hat{\theta}_i-\theta_i$，扰动上界的估计值定义为 $\hat{d}$，估计误差定义为 $\tilde{d}=\hat{d}-d$. 此外，定义 $\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}_0$，$\boldsymbol{\tau}_0=(\tau_{10},\tau_{20},\tau_{30})^{\mathrm{T}}$ 是未饱和限制的理想输入. 通过以上分析可得：$\dot{z}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_2+a_2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_2)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{\tau}_0+\boldsymbol{B}_0\Delta\boldsymbol{\tau}+\Delta\boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{d}^*-\dot{\boldsymbol{\alpha}}$，代入式(15)可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}_2&=\dot{V}_1+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{q}_2+a_2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_2)_i+\\&\boldsymbol{B}_{0i}\boldsymbol{\tau}_0+\boldsymbol{B}_{0i}\Delta\boldsymbol{\tau}+\Delta\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{\tau}+d_i^*-\dot{\alpha}_i]\leqslant\dot{V}_1+\\&\frac{|z_{21}|(|v_x|\theta_1+|\omega v_y|\theta_2)}{k_{b1}^2-z_{21}^2}+\frac{|z_{22}|(|v_y|\theta_1+|\omega v_x|\theta_2)}{k_{b2}^2-z_{22}^2}+\\&\frac{|z_{23}||\omega|\theta_3}{k_{b3}^2-z_{23}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{|z_{2i}|(\theta_4+d)}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\\&\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}(\boldsymbol{B}_{0i}\boldsymbol{\tau}_0-\dot{\alpha}_i)}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}\boldsymbol{B}_{0i}\Delta\boldsymbol{\tau}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\end{aligned}\tag{16}$$

为了解决控制器输入饱和问题，设计辅助系统(抗饱和补偿器)如下：

$$\dot{\xi}_i=-\left(k_{3i}+\frac{k_{4i}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\right)\xi_i+\Delta\tau_i\tag{17}$$

式中，k_{3i} 和 k_{4i} 是正常数，$\Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{0i}$ 表示第 i 个执行器饱和的控制输入与无饱和约束的控制输入之差，且辅助变量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{\mathrm{T}}$ 的初始值定义为 $\boldsymbol{\xi}(0)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

取 Lyapunov 函数如下：

$$V=V_2+\frac{1}{2\gamma_d}\tilde{d}_i^2+\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2\gamma_i}\tilde{\theta}_i^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\tag{18}$$

式中，$\gamma_d,\gamma_i(i=1,2,3,4)$ 均为正常数.

结合式(13)，(16)和(17)，对式(18)求导可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}\leqslant&-\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{1i}z_{1i}^2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{1i}\boldsymbol{J}_i(\theta)z_2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}+\\&\frac{|z_{21}|(|v_x|\theta_1+|\omega v_y|\theta_2)}{k_{b1}^2-z_{21}^2}+\frac{|z_{22}|(|v_y|\theta_1+|\omega v_x|\theta_2)}{k_{b2}^2-z_{22}^2}+\\&\frac{|z_{23}||\omega|\theta_3}{k_{b3}^2-z_{23}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{|z_{2i}|(\theta_4+d)}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\\&\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}(\boldsymbol{B}_{0i}\boldsymbol{\tau}_0-\dot{\alpha}_i)}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}\boldsymbol{B}_{0i}\Delta\boldsymbol{\tau}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\sum_{i=1}^{3}k_{3i}\xi_i^2-\\&\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{4i}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{3}\xi_i\Delta\tau_i+\frac{1}{\gamma_d}\tilde{d}_i\dot{\hat{d}}_i+\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\gamma_i}\tilde{\theta}_i\dot{\hat{\theta}}_i\end{aligned}\tag{19}$$

定义 $\tanh(\varepsilon z_2)=(\tanh(\varepsilon z_{21}),\tanh(\varepsilon z_{22}),\tanh(\varepsilon z_{23}))^{\mathrm{T}}$，设计控制器如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_0=&-\boldsymbol{B}_0^{-1}[\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{K}_2(z_2-\boldsymbol{\xi})+\\&(\hat{\theta}_4+\hat{d})\tanh(\varepsilon z_2)-\dot{\boldsymbol{\alpha}}]\end{aligned}\tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{K}_2=\mathrm{diag}\{k_{21},k_{22},k_{23}\}$，且 k_{2i} 为正常数；令 $\boldsymbol{h}_1=(h_{11},h_{12},h_{13})^{\mathrm{T}}$ 其中：

$$\begin{cases}h_{11}=(\hat{\theta}_1|v_x|+\hat{\theta}_2|\omega v_y|)\tanh(\varepsilon z_{21})\\h_{12}=(\hat{\theta}_1|v_y|+\hat{\theta}_2|\omega v_x|)\tanh(\varepsilon z_{22})\\h_{13}=\hat{\theta}_3|\omega|\tanh(\varepsilon z_{23})\end{cases}\tag{21}$$

令 $\boldsymbol{h}_2=(h_{21},h_{22},h_{23})^{\mathrm{T}}$ 其中：

$$\begin{cases}h_{21}=(k_{b1}^2-z_{b1}^2)\left(\dfrac{z_{11}\cos\theta}{k_{a1}^2-z_{11}^2}+\dfrac{z_{12}\sin\theta}{k_{a2}^2-z_{12}^2}\right)\\h_{22}=(k_{b2}^2-z_{b2}^2)\left(-\dfrac{z_{11}\sin\theta}{k_{a1}^2-z_{11}^2}+\dfrac{z_{12}\cos\theta}{k_{a2}^2-z_{a2}^2}\right)\\h_{23}=\dfrac{z_{13}(k_{b3}^2-z_{b3}^2)}{k_{a3}^2-z_{a3}^2}\end{cases}\tag{22}$$

将式(20)～(22)代入公式(19)可得：

$$\dot{V} \leqslant -\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{1i}z_{1i}^2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{2i}z_{2i}^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\frac{|z_{21}|(|v_x|\theta_1+|\omega v_y|\theta_2)}{k_{b1}^2-z_{21}^2}+\frac{|z_{22}|(|v_y|\theta_1+|\omega v_x|\theta_2)}{k_{b2}^2-z_{22}^2}+\frac{|z_{23}||\omega|\theta_3}{k_{b3}^2-z_{23}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{|z_{2i}|(\theta_4+d)}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\frac{z_{21}\tanh(\varepsilon z_{21})(|v_x|\hat{\theta}_1+|\omega v_y|\hat{\theta}_2)}{k_{b1}^2-z_{21}^2}-\frac{z_{22}\tanh(\varepsilon z_{22})(|v_y|\hat{\theta}_1+|\omega v_x|\hat{\theta}_2)}{k_{b2}^2-z_{22}^2}-\frac{z_{23}\tanh(\varepsilon z_{23})|\omega|\hat{\theta}_3}{k_{b3}^2-z_{23}^2}-\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}\tanh(\varepsilon z_{2i})(\hat{\theta}_4+\hat{d})}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{2i}z_{2i}\xi_i}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{z_{2i}\boldsymbol{B}_{0i}\Delta\boldsymbol{\tau}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\sum_{i=1}^{3}k_{3i}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{4i}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{3}\xi_i\Delta\tau_i+\frac{1}{\gamma_d}\tilde{d}_i\dot{\hat{d}}_i+\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\gamma_i}\tilde{\theta}_i\dot{\hat{\theta}}_i \tag{23}$$

设计未知参数 $d,\theta_i(i=1,2,3,4)$ 的自适应律如下所示：

$$\begin{cases}\dot{\hat{\theta}}_1=\gamma_1\left[\dfrac{|v_x|z_{21}\tanh(\varepsilon z_{21})}{k_1^2-z_{21}^2}+\dfrac{|v_y|z_{22}\tanh(\varepsilon z_{22})}{k_{b2}^2-z_{22}^2}\right]-\gamma_1\gamma_0\hat{\theta}_1\\ \dot{\hat{\theta}}_2=\gamma_2\left[\dfrac{|\omega v_y|z_{21}\tanh(\varepsilon z_{21})}{k_{b1}^2-z_{21}^2}+\dfrac{|\omega v_x|z_{22}\tanh(\varepsilon z_{22})}{k_{b2}^2-z_{22}^2}\right]-\gamma_2\gamma_0\hat{\theta}_2\\ \dot{\hat{\theta}}_3=\gamma_3\left[\dfrac{|\omega|z_{23}\tanh(\varepsilon z_{23})}{k_{b3}^2-z_{23}^2}\right]-\gamma_3\gamma_0\hat{\theta}_3\\ \dot{\hat{\theta}}_4=\gamma_4\sum_{i=1}^{3}\dfrac{z_{2i}\tanh(\varepsilon z_{2i})}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\gamma_4\gamma_0\hat{\theta}_4\\ \dot{\hat{d}}=\gamma_d\sum_{i=1}^{3}\dfrac{z_{2i}\tanh(\varepsilon z_{2i})}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\gamma_d\gamma_0\hat{d}\end{cases} \tag{24}$$

式中，γ_0 是正常数.

基于杨不等式，下列不等式成立：

$$\begin{cases}\dfrac{z_{2i}\boldsymbol{B}_{0i}\Delta\boldsymbol{\tau}}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\leqslant\dfrac{k_{2i}z_{2i}^2}{4(k_{bi}^2-z_{2i}^2)}+\dfrac{\|\boldsymbol{B}_{0i}\|^2\|\Delta\boldsymbol{\tau}\|^2}{k_{2i}(k_{bi}^2-z_{2i}^2)}\\ \xi_i\Delta\tau_i\leqslant\dfrac{k_{3i}}{2}\xi_i^2+\dfrac{\Delta\tau_i^2}{2k_{3i}}\\ \dfrac{k_{2i}z_{2i}\xi_i}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\leqslant\dfrac{k_{2i}z_{2i}^2}{4(k_{bi}^2-z_{2i}^2)}+\dfrac{k_{2i}\xi_i^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\end{cases} \tag{25}$$

将式(24)和(25)代入式(23)，根据引理 1 和假设 3，结合等式 $\tilde{d}\hat{d}=\frac{1}{2}(\tilde{d}^2+\hat{d}^2-d^2)$ 与 $\tilde{\theta}_i\hat{\theta}_i=\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_i^2+\tilde{\theta}_i^2-\theta_i^2)$ 可得：

$$\dot{V}\leqslant-\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{1i}z_{1i}^2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{k_{2i}z_{2i}^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\frac{\gamma_0}{2}\left(\tilde{d}_i^2+\sum_{i=1}^{4}\tilde{\theta}_i^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}k_{3i}\xi_i^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{(k_{4i}-k_{2i})\xi_i^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\frac{l}{\varepsilon}\left[\frac{p_1\theta_1+p_2p_3\theta_2}{k_{b1}^2-z_{21}^2}+\frac{p_2\theta_1+p_1p_3\theta_2}{k_{b2}^2-z_{22}^2}+\frac{p_3\theta_3}{k_{b2}^2-z_{22}^2}\right]+\frac{l}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}\frac{\theta_4+d}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\|\boldsymbol{B}_{0i}\|^2\|\Delta\boldsymbol{\tau}\|^2}{k_{2i}(k_{bi}^2-z_{2i}^2)}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\Delta\tau_i^2}{2k_{3i}}+\frac{\gamma_0}{2}\left(d_i^2+\sum_{i=1}^{4}\theta_i^2\right) \tag{26}$$

需要注意的是，饱和补偿器状态受到 $|\Delta\tau_i|$ 的值影响，且 $|\Delta\tau_i|$ 应有界，若 $|\Delta\tau_i|\to\infty$ 则表示系统跟踪上参考轨迹所需的控制是输入无穷大的，此时饱和补偿器失效，且系统无法完成期望轨迹的跟踪.

根据以上控制器设计思路，提出了如下定理.

定理 1：考虑全向移动机器人系统(6)，在假设 1 ~3 的情况下，若初始值 $z_{1i}(0)\in\boldsymbol{\Phi}_1\triangleq\{|z_{1i}|<k_{ai},i=1,2,3\}$ 和 $z_{2i}(0)\in\boldsymbol{\Phi}_2\triangleq\{|z_{2i}|<k_{bi},i=1,2,3\}$，$\Omega_1$ 和 Ω_2 为状态的约束集合，选取参数 $k_{1i}>0,k_{2i}>0,k_{3i}>0$ 和 $k_{4i}>k_{3i}$，在自适应饱和控制器(20)和自适应律(24)的作用下，通过选取合适的控制参数及 k_{ai} 与 k_{bi}，z_{1i} 和 z_{2i} 能够收敛到原点足够小的邻域内，且机器人的系统状态满足 $|q_{1i}|<\beta_{1i},|q_{2i}|<\beta_{2i}(i=1,2,3)$；闭环系统的所有信号实现一致有界.

证明：取 $\sigma=\max\{1/k_{bi}^2-z_{2i}^2,i=1,2,3\}$，根据引理 2，式(26)可简化为：

$$\dot{V}\leqslant-\sum_{i=1}^{3}k_{1i}\ln\frac{k_{ai}^2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}k_{2i}\ln\frac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}-\frac{\gamma_0}{2}\left(\tilde{d}_i^2+\sum_{i=1}^{4}\tilde{\theta}_i^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}k_{3i}\xi_i^2+\frac{\sigma l}{\varepsilon}(p_1\theta_1+p_2p_3\theta_2+p_2\theta_1+p_1p_3\theta_2+p_3\theta_3+3\theta_4+3d)+\sigma\sum_{i=1}^{3}\frac{\|\boldsymbol{B}_{0i}\|^2\|\Delta\boldsymbol{\tau}\|^2}{k_{2i}}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\Delta\tau_i^2}{2k_{3i}}+\frac{\gamma_0}{2}\left(d_i^2+\sum_{i=1}^{4}\theta_i^2\right)\leqslant-\eta V+\rho \tag{27}$$

假设 $\Delta\tau_i^2$ 具有未知上界 υ，且 $\|\boldsymbol{B}_{0i}\|^2\|\Delta\boldsymbol{\tau}\|^2$ 具有未知上界 ψ，因此，

$$\begin{cases}\eta=\min\{2k_{1i},k_{2i},\gamma_0,k_{3i},i=1,2,3\}\\ \rho=\dfrac{\sigma l}{\varepsilon}(p_1\theta_1+p_2p_3\theta_2+p_2\theta_1+p_1p_3\theta_2+p_3\theta_3+3\theta_4+3d)+\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\sigma\psi}{k_{2i}}+\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\upsilon}{2k_{3i}}+\dfrac{\gamma_0}{2}\left(d_i^2+\sum_{i=1}^{4}\theta_i^2\right)\end{cases} \tag{28}$$

进一步分析可得:$0\leqslant V(t)\leqslant\left(V(0)-\frac{\rho}{\eta}\right)e^{-\eta t}+\frac{\rho}{\eta}\leqslant V(0)+\frac{\rho}{\eta}$,根据引理 3 可知闭环系统中的所有信号都能保持一致有界,进一步可知:

$$\begin{cases}\ln\dfrac{k_{ai}^2}{k_{ai}^2-z_{1i}^2}\leqslant\left(V(0)-\dfrac{\rho}{\eta}\right)e^{-\eta t}+\dfrac{\rho}{\eta}\\ \ln\dfrac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2-z_{2i}^2}\leqslant\left(V(0)-\dfrac{\rho}{\eta}\right)e^{-\eta t}+\dfrac{\rho}{\eta}\end{cases}\tag{29}$$

解得:$|z_{1i}|\leqslant k_{ai}\sqrt{1-e^{-2[(V(0)-\rho/\eta)e^{-\eta t}+\rho/\eta]}}<k_{ai}$和$|z_{2i}|\leqslant k_i\sqrt{1-e^{-2[(V(0)-\rho/\eta)e^{-\eta t}+\rho/\eta]}}<k_{bi}$;当 ρ/η 减小时,$|z_{1i}|$,$|z_{2i}|$将随着时间逐渐减小趋近于原点的邻域,即在控制器参数中,选择较大的 ε,k_{2i}有利于减小 ρ,选择较大的 k_{1i},k_{2i},γ_0,k_{3i}可以增大 η,然而增大 γ_0 会导致 ρ 增大,因此需要特别注意 γ_0 的取值,会影响最终收敛界的大小. 证明完毕.

为了保证跟踪过程中机器人始终满足状态约束,在自适应反步中用到了障碍 Lyapunov 函数,同时利用饱和补偿器(17)有效处理了电机性能受限导致的输入饱和问题. 为对比本文提出的方法在处理状态约束与输入饱和的有效性,替换控制器中障碍 Lyapunov 项并去除抗饱和补偿器状态项 $\boldsymbol{\xi}$,利用传统 Lyapunov 形式:$V_2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3}z_{1i}^2+\sum_{i=1}^{3}z_{2i}^2\right)$,根据以上相同推导过程,提出一种未考虑状态约束和输入饱和的自适应控制器如式(30)所示,其余控制参数与本文提出的控制器(20)完全一致.

注释 1:本文采用障碍 Lyapunov 方法处理状态约束,结合反步法设计过程,通过设计 k_{ai} 和 k_{bi} 的取值限制反步误差变量 z_{1i}和 z_{2i}的变化范围,当 $z_{1i}\to k_{ai}$和 $z_{2i}\to k_{bi}$时,障碍 Lyapunov 函数将逼近于无穷,其中 k_{ai}的取值可由 $k_{ai}=\beta_{1i}-\delta_{1i}$确定,而 k_{bi}的取值则跟反步法的虚拟变量 α_i 有关,其取值为 $k_{bi}=\beta_{2i}-\delta_{2i}-|\alpha_i|_{\max}$. 因此通过障碍 Lyapunov 函数,限制 z_{1i}和 z_{2i}变化始终满足 $z_{1i}<k_{ai}$和 $z_{2i}<k_{bi}$,进而保证了全向移动机器人在跟踪过程中系统的状态约束界限不会被违反,从而满足机器人运动空间限制并提高工作的安全性.

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}=-\boldsymbol{B}_0^{-1}[\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_2+\boldsymbol{K}_2z_2+(\hat{\theta}_4+\hat{d})\tanh(\varepsilon z_2)-\dot{\boldsymbol{\alpha}}]\\ h_{11}=(\hat{\theta}_1|v_x|+\hat{\theta}_2|\omega v_y|)\tanh(\varepsilon z_{21}),h_{12}=(\hat{\theta}_1|v_y|+\hat{\theta}_2|\omega v_x|)\tanh(\varepsilon z_{22})\\ h_{13}=\hat{\theta}_3|\omega|\tanh(\varepsilon z_{23})\\ h_{21}=z_{11}\cos\theta+z_{12}\sin\theta,h_{22}=-z_{11}\sin\theta+z_{12}\cos\theta,h_{23}=z_{12}\cos\theta\\ \dot{\hat{\theta}}_1=\gamma_1[|v_x|z_{21}\tanh(\varepsilon z_{21})+|v_y|z_{22}\tanh(\varepsilon z_{22})]-\gamma_1\gamma_0\hat{\theta}_1\\ \dot{\hat{\theta}}_2=\gamma_2[|\omega v_y|z_{21}\tanh(\varepsilon z_{21})+|\omega v_x|z_{22}\tanh(\varepsilon z_{22})]-\gamma_2\gamma_0\hat{\theta}_2\\ \dot{\hat{\theta}}_3=\gamma_3|\omega|z_{23}\tanh(\varepsilon z_{23})-\gamma_3\gamma_0\hat{\theta}_3,\dot{\hat{\theta}}_4=\gamma_4\sum_{i=1}^{3}z_{2i}\tanh(\varepsilon z_{2i})-\gamma_4\gamma_0\hat{\theta}_4\\ \dot{\hat{d}}=\gamma_d\sum_{i=1}^{3}z_{2i}\tanh(\varepsilon z_{2i})-\gamma_d\gamma_0\hat{d}\end{cases}\tag{30}$$

注释 2:针对输入饱和问题,本文采用抗饱和补偿器(17)解决这一问题,当系统所需的控制力矩大于执行器性能时 $\Delta\tau_i\neq0$,此时抗饱和补偿器通过生成状态 ξ_i 补偿由于输入饱和引起的执行偏差影响,直到 $\Delta\tau_i=0$. 进一步,k_{3i}和 k_{4i}的取值大小会影响饱和补偿器的补偿速度,其取值越大,辅助系统的补偿速度越快. 因此,通过抗饱和辅助系统(17),本文有效处理了执行器饱和导致的不利影响,保证了输入受限条件下,机器人仍能完成期望的轨迹跟踪.

3　仿真分析

全向移动机器人模型参数如表 1 所示,全向移动机器人模型中参数的实际值与标称值可由式(6)计算得出;且给定参考轨迹 $\boldsymbol{q}_{1r}=[\sin(0.2t)\ \mathrm{m}, 1.5\sin(0.1t)\ \mathrm{m}, 0.5\sin(0.1t)\ \mathrm{rad}]^{\mathrm{T}}$,自适应饱和控制器参数选择如下:$k_{ai}=0.5$,$k_{bi}=k_{1i}=k_{3i}=0.1$,$k_{2i}=0.5$,$k_{4i}=0.3$,$\gamma_0=0.2$,$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=\gamma_d=1$,$\varepsilon=100$;自适应参数的初始估计值为:$\theta_1(0)=0.0254$,$\theta_2(0)=0.4344$,$\theta_3(0)=0.0176$,$\theta_4(0)=0.2$,$d(0)=0.1$ 且系统状态约束表示为$|\boldsymbol{q}_1|<(1.5\ \mathrm{m}, 2\ \mathrm{m}, 1\ \mathrm{rad})^{\mathrm{T}}$和$|\boldsymbol{q}_2|<(0.3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, 0.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, 0.15\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}})^{\mathrm{T}}$,系统输入饱和取值为$|\tau_i|\leqslant1\ \mathrm{N\cdot m}$,外部扰动为 $\boldsymbol{d}^*=[0.01\sin(0.1t), 0.02\sin(0.2t), 0.5\sin(0.03t)]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{N\cdot m}$;全向移动机器人轨迹跟踪的初始状态为 $\boldsymbol{q}_1(0)=(0.3\ \mathrm{m}, 0.45\ \mathrm{m}, -0.4\ \mathrm{rad})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{q}_2(0)=(0.15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, 0.45\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, -0.4\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}})^{\mathrm{T}}$;应用自适应饱和控制器(20)和自适应律(24)后仿真结果如图 2 ~ 5 所示,仿真图中的虚直线表示状态约束与输入饱和的上下界限.

表 1 全向移动机器人的物理参数

Table 1 Physical parameters of the omnidirectional mobile robot

数值	机器人质量，m/kg	质心到轮子中心垂线距离，L/m	轮子半径，r/m	黏滞摩擦系数，c/(kg·m^2·s^{-1})	机器人转动惯量，I_R/(kg·m^2)	轮子转动惯量，I_w/(kg·m^2)	减速机倍数，n
实际值	10	0.50	0.100	0.01	20	0.10	1
标称值	8	0.55	0.005	0.12	25	0.12	1

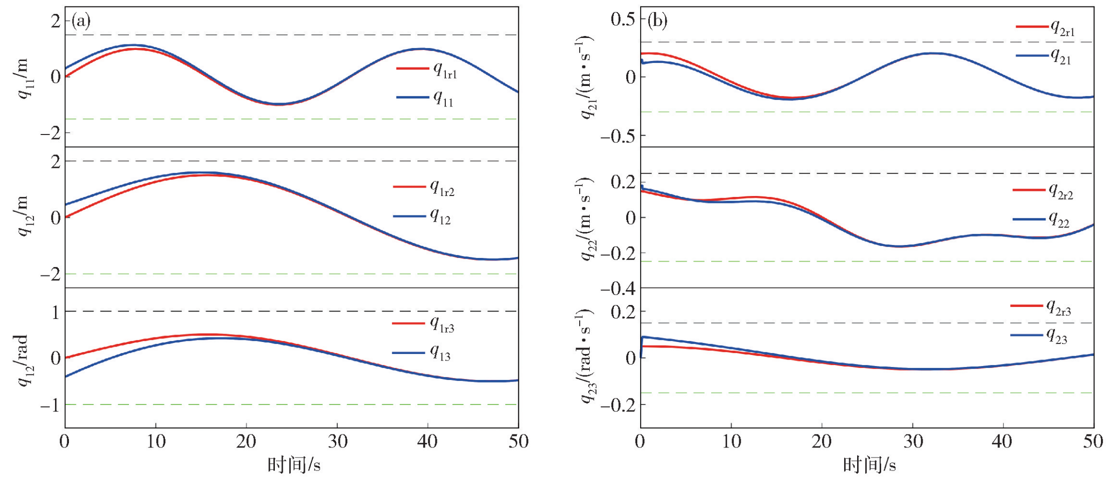


图 2 在控制器(20)作用下的 $\boldsymbol{q}_1$(a)和 $\boldsymbol{q}_2$(b)跟踪性能

Fig. 2 Tracking performance of $\boldsymbol{q}_1$ (a) and $\boldsymbol{q}_2$ (b) with the proposed controller (20)

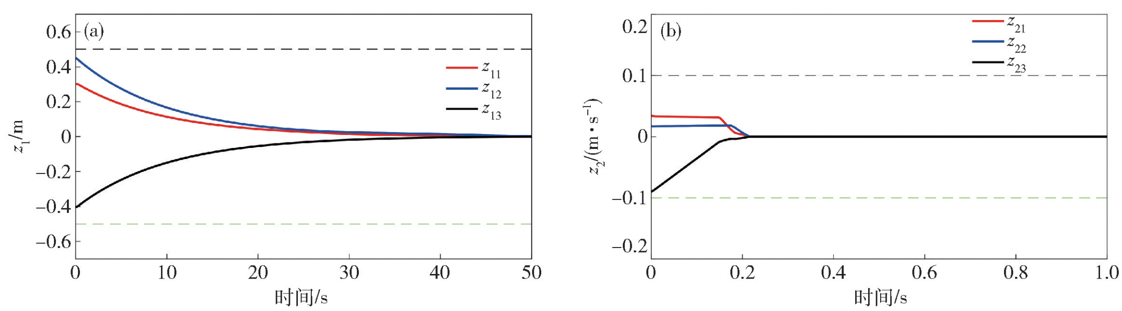


图 3 在控制器(20)作用下的 z_1(a)和 z_2(b)的收敛特性

Fig. 3 Convergence of z_1 (a) and z_2 (b) with the controller (20)

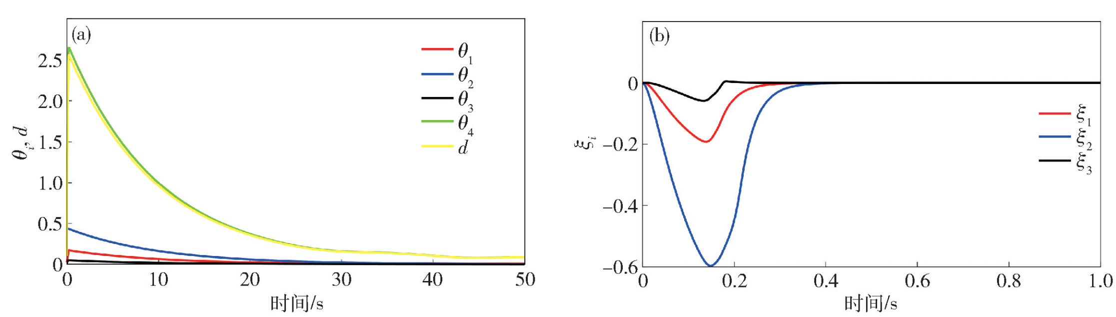


图 4 控制器(20)作用下的自适应参数更新律(a)和辅助系统状态(b)

Fig. 4 Adaptive laws (a) and auxiliary system status (b) with the controller (20)

图 2(a)所示的是机器人的轨迹跟踪情况，图 2(b)所示的是速度跟踪情况，如仿真所示，机器人能够跟随期望轨迹，并且所有状态处于约束界内；图 3 所示的误差收敛特性，表明误差能够收敛到原点的小邻域内，且误差始终位于有界区间内；图 4(a)所示的是五组自适应参数的估计值变化情况，图 4(b)表示饱和补偿器的状态变化，图 5 显示了机器人输入力矩变化，根据仿真可知饱和补偿器有效处理了

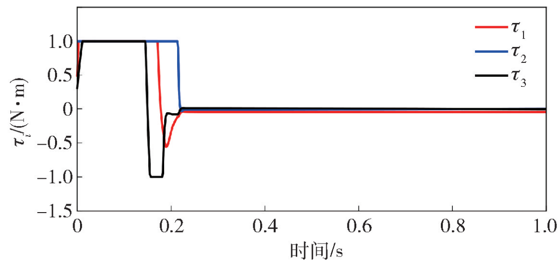


图 5 控制器(20)作用下的输出力矩

Fig. 5 Input torque with the proposed controller (20)

输入力矩受限情况，具有较好的补偿特性．因此，本文提出的自适应饱和控制器(20)能够有效处理系统状态约束和输入饱和，实现对期望轨迹的跟踪．

为了说明控制器(20)在处理状态约束与输入饱和的有效性，自适应控制器(30)去除了障碍 Lyapunov 函数相关项和辅助补偿系统状态项，其余控制参数与控制器(20)完全相同，其仿真效果如图 6～8 所示．图 6 表示的是控制器(30)下 $\boldsymbol{q}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_2$ 的跟踪性能，从图中看出，在轨迹跟踪过程中 $\boldsymbol{q}_{23}$ 明显超出了状态约束；图 7 所示的是 z_1 和 z_2 的收敛情况，与控制器(20)相比的误差收敛情况相比，在控制器(30)作用下，z_2 误差收敛速度大幅下降，图 3(b)中 z_2 大约在 0.2 s 即可收敛到原点邻域内，而控制器(30)下的 z_2 的需要 10 s 左右，且在原点附近有小幅震荡，其跟踪性能弱于控制器(20)；值得注意的是，控制器(30)下的 z_1 收敛的速度加快，但在原点附近的震荡幅度明显大于控制器(20)；图 8 表示的是控制器(30)作用下的输入力矩，图中可知 τ_2 和 τ_3 明显超出了输入饱和限制范围，在实际应用中，将会导致机器人跟踪性能的退化，甚至会无法完成期望轨迹的跟踪．因此，从控制器(20)与控制器(30)的对比可以看出，障碍 Lyapunov 方法避免了超出状态约束情况的发生，且抗饱和补偿器有效处理了输入饱和问题，最终实现了状态约束与输入饱和下的机器人期望轨迹跟踪．

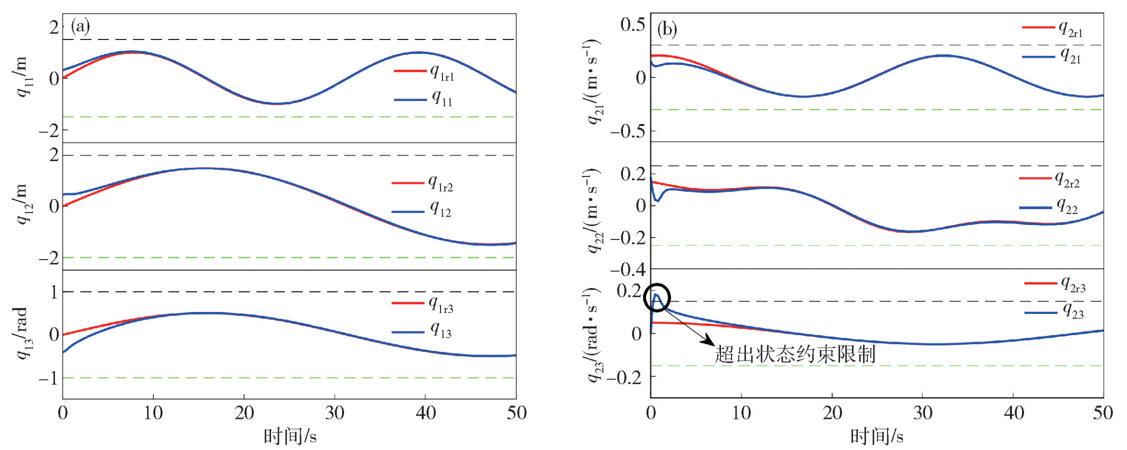


图 6 控制器(30)作用下的 $\boldsymbol{q}_1$(a)和 $\boldsymbol{q}_2$(b)跟踪性能

Fig. 6 Tracking performance of $\boldsymbol{q}_1$ (a) and $\boldsymbol{q}_2$ (b) with the proposed controller (30)

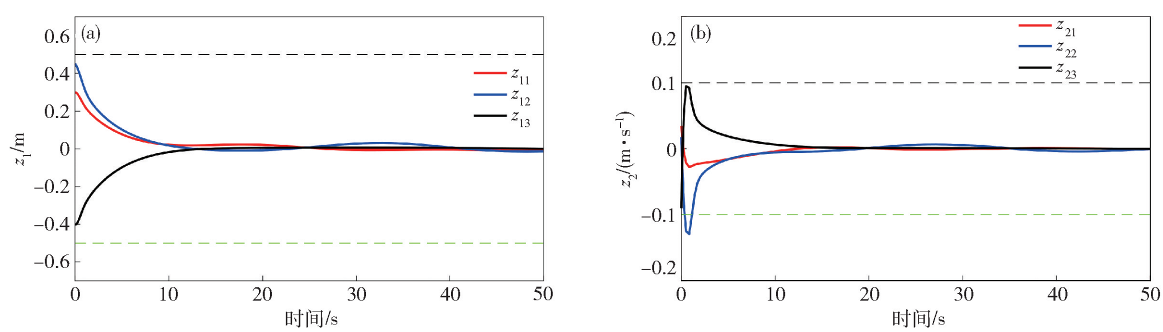


图 7 在控制器(30)作用下的 z_1(a)和 z_2(b)的收敛特性

Fig. 7 Convergence of z_1 (a) and z_2 (b) with the controller (30)

为进一步表明自适应饱和控制器(20)的先进性和有效性，基于文献[2]提出的经典比例-微分(PD)控制器如下所示：

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{B}_0^{-1}(\boldsymbol{K}_\mathrm{p} z_1 + \boldsymbol{K}_\mathrm{d} \dot{z}_1) \tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{K}_\mathrm{p} = \mathrm{diag}\{10, 20, 15\}$，$\boldsymbol{K}_\mathrm{d} = \mathrm{diag}\{2, 4, 3\}$，仿真效果如图 9～10 所示，图 9(a)表示机器人能够实现

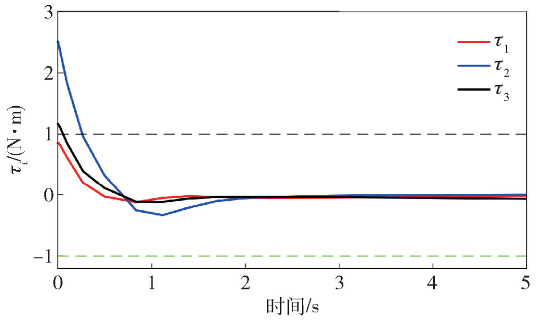


图 8 控制器(30)下的输入力矩

Fig. 8 Input torque with the controller (30)

对期望轨迹的跟踪，且满足运动的位置与姿态约束；图 9(b)则表明机器人无法满足其运动速度的约束要求；此外图 10 表示 PD 控制器下的输入力矩远远超出了执行器能力；以上 PD 控制器的仿真结果进一步说明了所提出的控制器(20)在处理状态约束与输入饱和方面的有效性和先进性.

4 结论

针对全向移动机器人轨迹跟踪过程中存在状态约束和输入饱和问题，本文提出了一种自适应跟踪控制方法，通过障碍 Lyapunov 函数结合反步法，解决了机器人运动过程中的状态受限问题，并利用自适应技术估计系统未知参数及未知有界扰动，设计的饱和补偿器使得机器人控制力矩满足输入约束要求. 通过仿真分析，与未采用障碍 Lyapunov 函数的自适应控制器及传统 PD 控制器进行了分析对比，该方法具有更好的鲁棒性和跟踪性能. 进一步的工作是存在时变状态约束与饱和限制情况下的全向移动机器人跟踪控制器设计问题，并结合非线性干扰观测器提升系统的动态跟踪性能.

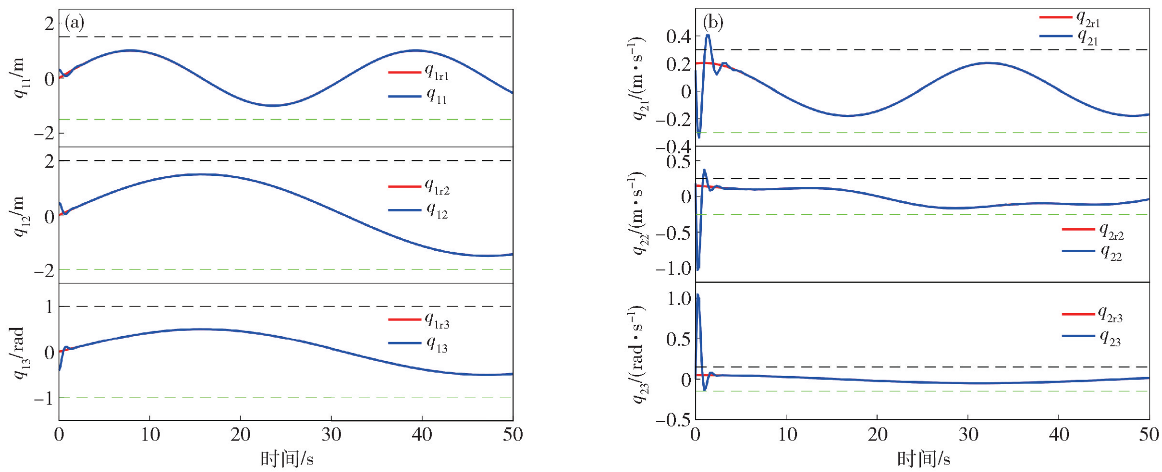


图 9 在 PD 控制器(31)作用下 $\boldsymbol{q}_1$(a)和 $\boldsymbol{q}_2$(b)跟踪性能

Fig. 9 Tracking performance of $\boldsymbol{q}_1$ (a) and $\boldsymbol{q}_2$ (b) with the PD controller (31)

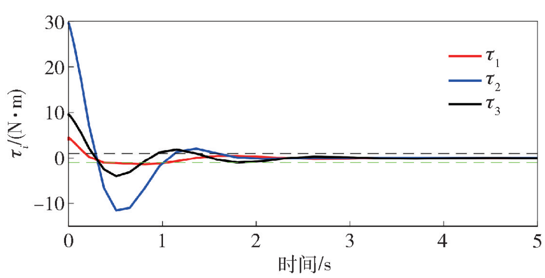


图 10 PD 控制器(31)下的输入力矩

Fig. 10 Input torque with the PD controller (31)

参 考 文 献

[1] Kramer J, Scheutz M. Development environments for autonomous mobile robots: a survey. *Auton Robot*, 2007, 22(2): 101

[2] Watanabe K, Shiraishi Y, Tzafestas S G, et al. Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots. *J Intell Rob Syst*, 1998, 22(3-4): 315

[3] Al Mamun M A, Nasir M T, Khayyat A. Embedded system for motion control of an omnidirectional mobile robot. *IEEE Access*, 2018, 6: 6722

[4] Kalmár-Nagy T, D'Andrea R, Ganguly P. Near-optimal dynamic trajectory generation and control of an omnidirectional vehicle. *Robot Auton Syst*, 2004, 46(1): 47

[5] Purwin O, D'Andrea R. Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles. *Robot Auton Syst*, 2006, 54(1): 13

[6] Liu Y, Zhu J J, Williams II R L, et al. Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization. *Robot Auton Syst*, 2008, 56(5): 461

[7] Indiveri G. Swedish wheeled omnidirectional mobile robots: kinematics analysis and control. *IEEE Trans Rob*, 2009, 25(1): 164

[8] Hashemi E, Jadidi M G, Jadidi N G. Model-based PI-fuzzy control of four-wheeled omni-directional mobile robots. *Robot Auton Syst*, 2011, 59(11): 930

[9] Huang H C, Tsai C C. Adaptive trajectory tracking and stabilization for omnidirectional mobile robot with dynamic effect and uncertainties. *IFAC Proc Vol*, 2008, 41(2): 5383

[10] Wang M M, Zhu Y Y, Zhang L, et al. An adaptive robust con-

troller for a mobile robot driven by Mecanum wheels. *J Northwest Polytech Univ*, 2018, 36(4): 627
(王明明, 朱莹莹, 张磊, 等. 麦克纳姆轮驱动的移动机器人自适应滑模控制器设计. 西北工业大学学报, 2018, 36(4): 627)

[11] Alakshendra V, Chiddarwar S S. Adaptive robust control of Mecanum-wheeled mobile robot with uncertainties. *Nonlinear Dyn*, 2017, 87(4): 2147

[12] Xu D, Zhao D B, Yi J Q, et al. Trajectory tracking control of omnidirectional wheeled mobile manipulators: robust neural network-based sliding mode approach. *IEEE Trans Syst Man Cybern Part B Cybern*, 2009, 39(3): 788

[13] Kang S Z, Wu H T. Research on fuzzy adaptive sliding mode control of omni-directional mobile robot. *Mach Des Manuf Eng*, 2017, 46(3): 70
(康升征, 吴洪涛. 全向移动机器人模糊自适应滑模控制方法研究. 机械设计与制造工程, 2017, 46(3): 70)

[14] Tee K P, Ge S S, Tay E H. Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems. *Automatica*, 2009, 45(4): 918

[15] Liu Y J, Li D J, Tong S C. Adaptive output feedback control for a class of nonlinear systems with full-state constraints. *Int J Control*, 2014, 87(2): 281

[16] Liu Y J, Tong S C. Barrier Lyapunov Functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints. *Automatica*, 2016, 64: 70

[17] Bai R. Neural network control-based adaptive design for a class of DC motor systems with the full state constraints. *Neurocomputing*, 2015, 168: 65

[18] Meng W C, Yang Q M, Sun Y X. Adaptive neural control of nonlinear MIMO systems with time-varying output constraints. *IEEE Trans Neural Networks Learn Syst*, 2015, 26(5): 1074

[19] Ding L, Li S, Liu Y J, et al. Adaptive neural network-based tracking control for full-state constrained wheeled mobile robotic system. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2017, 47(8): 2410

[20] Wang C X, Wu Y Q. Finite-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems with full state constraints. *Int J Control*, 2017, 46(7):1

[21] Chen X H, Jia Y M, Matsuno F. Tracking control for differential-drive mobile robots with diamond-shaped input constraints. *IEEE Trans Control Syst Technol*, 2014, 22(5): 1999

[22] Liu C X, Gao J, Xu D M. Lyapunov-based model predictive control for tracking of nonholonomic mobile robots under input constraints. *Int J Control Autom Syst*, 2017, 15(5): 2313

[23] Chen M, Ge S S, Ren B B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints. *Automatica*, 2011, 47(3): 452

[24] Wen C Y, Zhou J, Liu Z T, et al. Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance. *IEEE Trans Autom Control*, 2011, 56(7): 1672

[25] Khalil H K. *Nonlinear Systems*. 3rd Ed. London: Prentice Hall Inc, 2002