

## 《工程科学学报》编辑部

# 未知不匹配互联系统的非对称输入约束分散控制器设计

王鼎<sup>1,2,3,4</sup>✉, 范文倩<sup>1,2,3,4</sup>, 刘奥<sup>1,2,3,4</sup>

1) 北京工业大学信息学部, 北京 100124

2) 计算智能与智能系统北京市重点实验室, 北京 100124

3) 智慧环保北京实验室, 北京 100124

4) 北京人工智能研究院, 北京 100124

✉ 通信作者, E-mail: dingwang@bjut.edu.cn

**摘要** 本文基于自适应动态规划算法研究了具有未知不匹配互联和非对称输入约束的连续时间非线性系统分散控制问题。首先, 根据孤立子系统的局部状态和耦合子系统的参考状态, 采用径向基函数神经网络近似未知互连项, 从而消除了互联项满足匹配条件且存在上界的常见假设。然后, 基于自适应评判框架, 本文将分散最优控制器设计问题转化为一系列子系统非对称约束下局部最优控制器设计问题。利用Lyapunov稳定性定理, 证明了不对称输入约束控制器能够迅速地镇定大规模分散系统。其中, 引入状态观测器估计互联子系统状态并保证了观测误差满足一致最终有界。另外, 利用评判神经网络近似改进后的代价函数, 以近似求解Hamilton-Jacobi-Bellman方程, 获得满足非对称输入约束的最优分散控制策略。基于评判网络权值更新规则, 通过选择合适的Lyapunov函数保证了权值近似误差满足一致最终有界。最后, 通过仿真实例验证了该算法的有效性, 并通过与未改进代价函数的传统方法对比, 体现了该方法的先进性。

**关键词** 自适应动态规划; 非对称输入约束; 分散控制; 神经网络; 最优控制; 状态观测器; 未知不匹配互联  
**分类号** TG142.71

## Decentralized controller design with asymmetric input constraints for unknown unmatched interconnected systems

WANG Ding<sup>1,2,3,4</sup>✉, FAN Wen-qian<sup>1,2,3,4</sup>, LIU Ao<sup>1,2,3,4</sup>

1) Faculty of Information Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124

2) Beijing Key Laboratory of Computational Intelligence and Intelligent System, Beijing 100124

3) Beijing Laboratory of Smart Environmental Protection, Beijing 100124

4) Beijing Institute of Artificial Intelligence, Beijing 100124

✉ Corresponding author, E-mail: dingwang@bjut.edu.cn

**ABSTRACT** In this paper, the decentralized control problem is investigated based on the adaptive dynamic programming for continuous-time nonlinear systems with unknown mismatched interconnections and asymmetric input constraints. First, the unknown interconnection term is approximated by the radial basis function neural network based on the local states of the isolated subsystems and the reference states of the coupled subsystems. Hence, the common assumption is eliminated that the

**收稿日期:**

**基金项目:** 新一代人工智能国家科技重大专项(2021ZD0112302, 2021ZD0112301), 国家自然科学基金项目(62222301, 61890930-5, 62021003), 北京市自然科学基金资助项目(JQ19013)

地址: 北京市海淀区学院路 30 号  
E-mail: xuebaozr@ustb.edu.cn

邮政编码: 100083  
http://cje.ustb.edu.cn

电话: 010-62333436

interconnection is matched and upper bounded. Then, by using the framework of adaptive critic networks, the problem of decentralized optimal controller design is transformed into a series of local optimal controller design problems under asymmetric constraints of subsystems. In addition, based on the Lyapunov stability theorem, it is proved that the controllers with asymmetric input constraints can stabilize the large-scale system quickly. More importantly, we draw a conclusion that the designed control laws are the decentralized control strategies for the large-scale nonlinear system. Then, based on the radial basis function neural network and the critic neural network, we achieve the goal of approximating interconnection terms and cost functions respectively, so as to obtain the optimal decentralized control strategies under asymmetric constraints. At the same time, the Lyapunov theorem is employed to prove that the observation error and the weight approximation error are uniformly ultimately bounded. Among them, the state observer is introduced to estimate the state of the interconnected subsystems. In addition, by employing the critic neural network to approximate the improved cost function, the Hamilton-Jacobi-Bellman equation can be solved approximatively, so as to obtain the optimal decentralized control strategies satisfying the asymmetric input constraints. At the same time, based on the weight updating rule of the critic neural network, we can guarantee that the weight approximation errors are uniformly ultimately bounded by selecting the suitable Lyapunov function. Herein, taking two factors of convergence speed and computational burden into account, two types of neural networks are selected in this paper. Finally, the simulation experiment and the comparative experiment are implemented in MATLAB environment, which verify the effectiveness of the developed control method. In order to demonstrate the advancement of the algorithm developed in this paper under asymmetric control constraints, comparative experiments are conducted by using the unimproved cost function and control strategy without control constraints. The simulation results are shown in Figure 1 to Figure 9, which fully verifies the effectiveness of the established scheme. We can derive the developed control method has obvious advantages in both stabilization speed and performance.

**KEY WORDS** adaptive dynamic programming; asymmetric input constraints; decentralized control; neural networks; optimal control; state observers; unknown mismatched interconnections

随着社会工业生产质量不断提升和经济效益不断增长,涌现出大量规模宏大且复杂的非线性系统,如生态系统,通信系统,交通系统和电力系统等等。一般来说,一个大规模系统包含一系列相互连接的耦合子系统,这增加了采用集中控制方法的难度。为了克服这一困难, Bakule [1]提出了分散控制策略,即将整个大系统划分为若干个可管理的独立子系统。在过去的几十年里,大规模系统的分散控制器设计[2-3]受到了广泛的关注。众所周知,非线性系统的最优控制问题可以通过求解 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 或者 Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) 方程来解决,而通过使用自适应动态规划(adaptive dynamic programming, ADP)方法可以实现近似求解 HJB 或 HJI 方程[4-11]。由于计算复杂度随系统维数增加而急剧增大,而 ADP 方法可以避免维数灾难,因此 ADP 方法也成为了解决非线性分散系统最优控制问题的有效工具[12-17]。实现这一方法的重要工具是神经网络(neural network, NN)[18-20],例如文献[18]针对电力系统中普遍存在的系统非线性和参数不确定性等问题,提出一种基于径向基函数神经网络(radial basis function neural network, RBFNN)的分布式自适应控制器,以提高多机电力系统的稳定性。文献[19]通过构建评判神经网络近似最优代价函数,进而得到最优跟踪控制算法。

在复杂的非线性系统中,互联方式往往是不匹配的[21-24],而针对这一问题,我们可将其划分为已知不匹配互联[21-22]和未知不匹配互联[23-24]。Zhao 等人[23]针对具有未知不匹配互联的大规模系统提出了一种基于局部策略迭代算法的分散控制方法。Luo 等人[24]提出了一种基于自适应动态规划的事件触发分散最优容错控制方法,并将其应用于具有执行器故障的不匹配互联非线性系统中。文中指出可利用权值非周期的更新建立分散观测器,从而同时近似执行器故障和不匹配的未知互联项。

由于系统受固有物理特性的影响,如空气,压力,温度和电压,使得输入约束在工程应用中广泛存在。为了保证被控系统的安全性和稳定性,我们必须考虑具有输入约束的系统。输入约束分为两类,即对称输入约束[4, 25-26]和非对称输入约束[20-22]。在[4]中, Wang 等人建立了离散时间非

线性零和博弈的双事件触发约束控制方法。Yang 等人[25]应用一种基于策略迭代的 ADP 方法，获得部分未知不匹配互联系统的分散最优控制律。文献[21]中的分散控制律保证了整个受控系统的渐近稳定性且对一般互联系统，特别是具有非对称输入约束的非线性互联系统进行了研究。

本文应用 ADP 方法研究非线性系统在未知不匹配互联和非对称输入约束下的分散镇定问题。主要贡献如下：

- (1) 本文通过改进的代价函数处理具有未知不匹配互联且带有非对称输入约束的非线性分散控制问题，从而扩展了 ADP 算法的应用范围。
- (2) 本文引入局部状态观测器，利用耦合子系统的局部状态和参考状态近似未知不匹配互联项，从而消除互联项存在上界的常见假设。

## 1 问题描述

考虑一类未知不匹配互联的非线性大规模系统

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(t))\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{Z}_i(\mathbf{x}(t)) \quad (1)$$

其中， $i=1,2,\dots,N$ ， $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  和  $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  分别是第  $i$  个子系统的状态向量和输入向量。 $\mathbf{x}(t)$  为整个系统的状态， $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t)) \in \mathbb{R}^{n_i}$  和  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(t)) \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$  是已知函数。另外， $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}(t))$  表示大规模系统的互联项， $[\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T \in \mathbb{R}^n$  表示大规模系统的整个系统状态且  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ 。由于 RBFNN 结构简单且逼近能力强，因此用其来近似未知互联项

$$\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{w}_{ri}^T \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\mathbf{x}(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}(t)) \quad (2)$$

$\mathbf{w}_{ri} \in \mathbb{R}^{q_i \times n_i}$  是一个神经元个数为  $q_i$  的可调权值矩阵。 $\boldsymbol{\sigma}_{ri}(\mathbf{x}(t)) = [\sigma_{ri1}(\mathbf{x}(t)), \sigma_{ri2}(\mathbf{x}(t)), \dots, \sigma_{riq_i}(\mathbf{x}(t))]^T$  为基函数向量， $\sigma_{riv}(\mathbf{x}(t)), v=1, \dots, q_i$  通常被选为高斯函数，即  $\sigma_{riv}(\mathbf{x}(t)) = \exp(-(\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}_{iv})^T (\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}_{iv}) / a_{iv}^2)$ 。其中常数  $a_{iv}$  是基函数的宽度且  $a_{iv} > 0$ ， $\mathbf{b}_{iv}$  是所有元素均为正数的常数向量，表示基函数的中心。另外， $\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n_i}$  是 NN 近似误差。由于近似误差可以通过增加 NN 隐藏节点数而不断减小，因此可以假设它存在上界，即

$\|\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}(t))\| \leq \theta_{i1}$  且  $\theta_{i1}$  是未知的正常数。为了放松互联项是有上界的这一假设，根据局部子系统的状态和耦合子系统的参考状态，通过 RBFNN 近似第  $i$  个子系统中的互联项，即

$$\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{id}(t)) + \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}(t)) + \boldsymbol{\Delta}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{id}(t)) \quad (3)$$

$\mathbf{x}_{id}(t) = [x_{1d}(t), x_{2d}(t), \dots, x_{id}(t), \dots, x_{Nd}(t)]^T$ ，其中  $x_{id}(t)$  表示耦合子系统的参考状态。另外， $\mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{id}(t)) = \mathbf{w}_{ri}^T \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\mathbf{x}_{id}(t))$ ， $\boldsymbol{\Delta}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{id}(t)) = \mathbf{w}_{ri}^T \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{w}_{ri}^T \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\mathbf{x}_{id}(t))$  是替换误差。由于基函数向量  $\boldsymbol{\sigma}_{ri}(\mathbf{x}(t))$  的各个高斯函数满足全局 Lipschitz 条件，可得  $\|\boldsymbol{\Delta}_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_{id}(t))\| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} E_j$ 。

其中， $E_j = \|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{jd}(t)\|$  且  $c_{ij} > 0$  是一个未知的全局 Lipschitz 常数。

对于第  $i$  个孤立子系统，其表达式为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(t))\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{id}(t)) \quad (4)$$

由以上对于  $\mathbf{x}_{id}(t)$  的定义可知， $\mathbf{x}_{id}(t)$  由子系统的局部状态和参考状态组成，而参考状态也是子系统局部状态的组成之一，则(4)中  $\mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{id}(t))$  一项取决于子系统的局部状态。因此，与互联子系统(1)不同，孤立子系统(4)仅取决于子系统的局部状态。为了避免子系统概念的混淆，以下给出了互

联子系统，孤立子系统和耦合子系统的相关概念。

在本文中，所有与第  $i$  个子系统互联的子系统称为耦合子系统。另外，我们称(1)为互联子系统， $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}(t))$  包含了所有子系统的实际状态。与之不同的是，孤立子系统(4)中的  $\mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{iD}(t))$  仅取决于耦合子系统的局部状态和参考状态。也就是说， $\mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{iD}(t))$  独立于  $\mathbf{Z}_i(\mathbf{x}(t))$ 。因此，(4)被称为孤立子系统。

## 2 分散控制器设计与稳定性分析

在本节中，基于最优控制理论，展示了在非对称约束条件下的控制器推导过程，并证明了在非对称约束条件下设计的最优控制器可以镇定整个分散大规模系统。

### 2.1 最优控制

基于最优控制理论，考虑孤立子系统(4)，我们的目标是获得第  $i$  个子系统非对称约束条件下的最优控制策略  $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i)$ 。因此，需要找到满足非对称约束的最优控制策略以最小化改进的代价函数。代价函数如下所示

$$J_i(\mathbf{x}_{i0}) = \int_0^\infty \hat{k}_i \left\| (\nabla J_i(\mathbf{x}_i))^\top \right\| E_i + U_i(\mathbf{x}_i(\tau), \mathbf{u}_i(\tau)) d\tau \quad (5)$$

其中， $\hat{k}_i$  是一个正数且  $U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) = \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i + \Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))$  为效用函数。对于任意的  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)$  和  $\mathbf{x}_i$ ，则  $U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) \geq 0$ ，其中  $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  是正定矩阵且  $\Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))$  是半正定函数，其表达式为

$$\Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) = 2\eta_i \sum_{p=1}^{m_i} \int_{\phi_i}^{u_{ip}} \psi_i^{-1}(\eta_i^{-1}(\zeta_p - \phi_i)) d\zeta_p \quad (6)$$

式中， $\eta_i = (u_{\sup}^i - u_{\inf}^i) / 2$ ， $\phi_i = (u_{\sup}^i + u_{\inf}^i) / 2$  且  $u_{\sup}^i$  和  $u_{\inf}^i$  分别表示第  $i$  个子系统控制策略的上界和下界。为了满足非对称控制约束，给出了符合上述条件的改进代价函数。在此，令

$\psi_i(\cdot) = \tanh(\cdot)$ 。当  $y \in \mathbf{R}$ ，则奇函数的表达式为  $\tanh(y) = (e^y - e^{-y}) / (e^y + e^{-y})$ ；当  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_h]^\top \in \mathbf{R}^h$ ，则  $\tanh(\mathbf{y}) = [\tanh(y_1), \tanh(y_2), \dots, \tanh(y_h)]^\top \in \mathbf{R}^h$ 。另外，若(5)是连续可微的，则非线性 Lyapunov 方程为

$$0 = \hat{k}_i \left\| (\nabla J_i(\mathbf{x}_i))^\top \right\| E_i + U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) + (\nabla J_i(\mathbf{x}_i))^\top [\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{iD})] \quad (7)$$

定义哈密顿函数为

$$H_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i), \nabla J_i(\mathbf{x}_i)) = \hat{k}_i \left\| (\nabla J_i(\mathbf{x}_i))^\top \right\| E_i + U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) + (\nabla J_i(\mathbf{x}_i))^\top [\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{iD})] \quad (8)$$

式(5)的最优形式可以表达为

$$J_i^*(\mathbf{x}_{i0}) = \min_{\mathbf{u}_i \in \Psi_i(\mathcal{Q}_i)} J_i(\mathbf{x}_{i0}) \quad (9)$$

其中， $\mathcal{Q}_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$  代表一个紧集，当控制律  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)$  属于  $\Psi_i(\mathcal{Q}_i)$ ，则代表这个控制策略是可容许的并且可以使子系统的状态达到渐近稳定。根据最优控制理论， $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  满足以下 HJB 方程

$$0 = \min_{\mathbf{u}_i \in \Psi_i(\mathcal{Q}_i)} H_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i), \nabla J_i^*(\mathbf{x}_i)) \quad (10)$$

假设其解  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  存在且连续可微，则子系统在非对称约束条件下的最优控制策略为

$$\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i) = -\eta_i \tanh\left(\frac{1}{2\eta_i} \mathbf{g}_i^\top(\mathbf{x}_i) \nabla J_i^*(\mathbf{x}_i)\right) + \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (11)$$

其中,  $\bar{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]^\top \in \mathbf{R}^m$ 。

在此, 需要指出的是  $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i) = [u_{i1}(\mathbf{x}_i), u_{i2}(\mathbf{x}_i), \dots, u_{im_i}(\mathbf{x}_i)]^\top \in \mathbf{R}^{m_i}$  满足  $u_{\min}^i(\mathbf{x}_i), u_{ii}(\mathbf{x}_i), u_{\max}^i(\mathbf{x}_i)$  且  $|u_{\min}^i(\mathbf{x}_i)| \neq |u_{\max}^i(\mathbf{x}_i)|, l=1, 2, \dots, m_i, u_{\min}^i(\mathbf{x}_i) \in \mathbf{R}$  和  $u_{\max}^i(\mathbf{x}_i) \in \mathbf{R}$  分别代表控制输入分量的最大界和最小界。由式(11)可知, 每一个子系统中各个输入分量  $u_{il}$  取值范围为  $(-\eta_i + \phi_i) \sim (\eta_i + \phi_i)$  且  $\phi_i \neq 0$ , 这体现了本文的研究主题与重点, 即最优控制策略满足非对称约束。另外,  $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\phi}} \neq \mathbf{0}$ , 因此当第  $i$  个子系统的状态最终达到平衡点  $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$  时, 最优控制律向量  $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i)$  不会变为零向量。值得关注的是,  $\bar{\boldsymbol{\phi}} \neq \mathbf{0}$  依然可以保持系统的稳定性, 以下定理 1 给出了具体理论支撑, 即利用 Lyapunov 理论证明了式(11)中非对称约束条件下的最优控制律可以镇定整个大规模系统的状态。与此同时, 在仿真实验中, 各个子系统的状态最终达到了收敛, 即验证了  $\bar{\boldsymbol{\phi}} \neq \mathbf{0}$  并不会影响系统的稳定性。

## 2.2 稳定性分析

针对大规模非线性系统(1), 为了保证整个闭环系统的稳定性, 本小节将大规模分散系统的镇定问题转化为设计一系列非对称约束条件下的最优控制器问题。其中, 整个大规模系统的稳定性证明如定理 1 所示

**定理 1** 考虑互联系统(1)以及改进后的代价函数(5), 其中  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  是 HJB 方程(10)的最优解, 式(11)中的  $\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i)$  为非对称约束条件下的最优控制策略。则可以推导出非对称控制组  $(\mathbf{u}_1^*(\mathbf{x}_1), \mathbf{u}_2^*(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{u}_N^*(\mathbf{x}_N))$  是大规模非线性系统(1)的分散控制策略。

**证明:** 基于式(9)可得  $J_i^*(\mathbf{x}_i) > 0$ , 即  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  是一个正定函数。因此, 可以选择  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  作为 Lyapunov 函数, 需指出的是,  $\Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))$  这一项决定了非对称约束条件下的最优控制策略的有效性, 因此, 对  $\Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))$  这一项的处理是整个证明过程中的关键点。Lyapunov 函数  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{J}_i^*(\mathbf{x}_i) &= (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top [f_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i) + \mathbf{Z}_{id}(\mathbf{x}_{iD}) + \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{iD})] \\ &= -\hat{k}_i \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \|E_i - U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) + (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top (\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{iD}))\| \\ &\leq -\hat{k}_i \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \|E_i - U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))\| + \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \|\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x})\| \\ &\quad + \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \|\mathbf{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{iD})\| \end{aligned} \quad (12)$$

为了进行简化, 令  $\lambda_i = -\hat{k}_i \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \|E_i - U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))\|$ , 假设  $\|\boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x})\| \leq \theta_{i1}$  可得

$$\begin{aligned} \dot{J}_i^*(\mathbf{x}_i) &\leq \lambda_i + \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \theta_{i1} + \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} E_j \\ &\leq \lambda_i + \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \theta_{i1} + \max_{ij} \{c_{ij}\} \left\| (\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \sum_{j=1, j \neq i}^N E_j \end{aligned} \quad (13)$$

因此, 其复合函数为



$$\begin{aligned}
J^*(\mathbf{x}_i) &= \sum_{i=1}^N J_i^*(\mathbf{x}_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left( \lambda_i + \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \theta_{i1} \right) + \max_{ij} \{c_{ij}\} \sum_{i=1}^N \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \sum_{j=1, j \neq i}^N E_j
\end{aligned} \tag{14}$$

根据  $E_i = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{id}\| \geq 0$ ，可得

$$\begin{aligned}
J^*(\mathbf{x}_i) &\leq \sum_{i=1}^N \left( \lambda_i + \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \theta_{i1} \right) + \max_{ij} \{c_{ij}\} \sum_{i=1}^N \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \sum_{j=1}^N E_j \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left( \lambda_i + \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \theta_{i1} \right) + N \max_{ij} \{c_{ij}\} \sum_{i=1}^N \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| E_i \\
&\quad - \max_{ij} \{c_{ij}\} \sum_{i=1}^N \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \sum_{j=1}^N (E_i - E_j)
\end{aligned} \tag{15}$$

令  $k_i = N \max_{ij} \{c_{ij}\}$  且  $\tilde{k}_i = k_i - \hat{k}_i$ ，那么

$$\begin{aligned}
J^*(\mathbf{x}_i) &\leq \sum_{i=1}^N \left( \tilde{k}_i \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| E_i - U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) + \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \theta_{i1} \right) \\
&\quad - \max_{ij} \{c_{ij}\} \sum_{i=1}^N \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \sum_{j=1}^N (E_i - E_j)
\end{aligned} \tag{16}$$

为了突出效用函数中  $\Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))$  这一项在整个稳定性证明过程中的作用，可令  $\chi_{i1} = \tilde{k}_i \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| E_i + \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \theta_{i1} - \max_{ij} \{c_{ij}\} \sum_{i=1}^N \|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \sum_{j=1}^N (E_i - E_j)$ ，假设  $\chi_{i1}$  存在上界，则  $\chi_{i1} \leq \theta_i$ ，因此可以将(16)化简为如下形式

$$\begin{aligned}
J^*(\mathbf{x}_i) &\leq \sum_{i=1}^N \left( \theta_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i - \Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i)) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left( \theta_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left( \theta_i - \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_i) \|\mathbf{x}_i\|^2 \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

其中， $\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_i)$  代表矩阵  $\mathbf{Q}_i$  的最小特征值。由(17)可得，通过不等式缩放有效地处理了  $\Xi(\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i))$  项。当  $J^*(\mathbf{x}_i) < 0$  成立，则  $\mathbf{x}_i$  属于以下紧集

$$\Omega_{\mathbf{x}_i} = \left\{ \mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| > \sqrt{\frac{\theta_i}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_i)}} \right\} \tag{18}$$

综上所述，在本次证明过程中，**消除了互联项存在上界这一假设条件**并将其转换为处理有界项  $\|(\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i))^T\| \theta_{i1}$ 。更重要的是，推导出非对称**控制组**  $(\mathbf{u}_1^*(\mathbf{x}_1), \mathbf{u}_2^*(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{u}_N^*(\mathbf{x}_N))$  是大规模非线性系统(1)的分散控制律。与此同时，在非对称控制输入的条件下，保证了非线性大规模系统(1)是一致最终有界的(uniformly ultimately bounded, UUB)。证毕。

### 3 实现工具：神经网络

在本节中，基于 RBFNN 和评判 NN 分别实现了近似互联项和代价函数的目标，从而获得非对称约束条件下的最优分散控制策略。与此同时，利用 Lyapunov 定理证明了观测误差和权值近似误差满足 UUB 稳定。

### 3.1 径向基函数神经网络

在本小节中，使用状态观测器来估计互联子系统(1)

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = f_i(\hat{x}_i(t)) + g_i(\hat{x}_i(t))u_i(\hat{x}_i(t)) + \hat{Z}_{id}(\hat{x}_{iD}(t)) + \pi_i e_i(t) \quad (19)$$

其中， $e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$  是观测误差， $\pi_i = \text{diag}[\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{in_i}] \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$  是所有元素都为正数的观测器增益矩阵。 $\hat{Z}_{id}(\hat{x}_{iD}(t))$  可用来近似式(2)中的  $Z_i(x(t))$ ，可表示为

$$\hat{Z}_{id}(\hat{x}_{iD}(t)) = \hat{w}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \quad (20)$$

权值矩阵  $\hat{w}_{ri}$  更新律为

$$\dot{\hat{w}}_{ri} = \alpha_i \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) e_i^T(t) \quad (21)$$

其中， $\alpha_i > 0$  是一个常数，结合式(1)，(3)和(19)并对  $e_i(t)$  进行放缩，可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= (f_i(x_i(t)) - f_i(\hat{x}_i(t))) + (g_i(x_i(t)) - g_i(\hat{x}_i(t)))u_i(x_i(t)) + Z_{id}(x_{iD}(t)) \\ &\quad + \xi_i(x(t)) + \Delta_i(x(t), x_{iD}(t)) - \hat{Z}_{id}(\hat{x}_{iD}(t)) - \pi_i e_i(t) \\ &\leq h_{if} e_i(t) + h_{ig} e_i(t) \|u_i(x_i(t))\| + \tilde{w}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \\ &\quad + \xi_i(x(t)) + \Delta_i(x(t), x_{iD}(t)) - \pi_i e_i(t) \end{aligned} \quad (22)$$

其中， $\tilde{w}_{ri}$  为权值近似误差向量， $h_{if}$  和  $h_{ig}$  是正常数。

**定理 2** 考虑互联子系统(1)，未知不匹配互联项近似值(20)以及权值更新律(21)，通过将(1)和状态观测器(19)相结合，可证明所得到的观测误差  $e_i(t)$  为 UUB。

**证明：** 选择 Lyapunov 函数

$$L_{i1}(t) = \frac{1}{2} e_i^T(t) e_i(t) + \frac{1}{2} \alpha_i^{-1} \sigma_{ri}^T(\hat{x}_{iD}(t)) \tilde{w}_{ri} \tilde{w}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \quad (23)$$

令  $\chi_{i2} = h_{ig} e_i(t) \|u_i(x_i(t))\| + \Delta_i(x(t), x_{iD}(t)) + \xi_i(x(t))$  且  $\|\chi_{i2}\| \leq \theta_{i2}$ ，则式(23)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{L}_{i1}(t) &= e_i^T(t) \dot{e}_i(t) - \alpha_i^{-1} \sigma_{ri}^T(\hat{x}_{iD}(t)) \tilde{w}_{ri} \dot{\hat{w}}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \\ &\leq e_i^T(t) (h_{if} e_i(t) + \tilde{w}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) - \pi_i e_i(t) + \chi_{i2}) \\ &\quad - \alpha_i^{-1} \sigma_{ri}^T(\hat{x}_{iD}(t)) \tilde{w}_{ri} \dot{\hat{w}}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \\ &\leq -(\lambda_{\min}(\pi_i) - h_{if}) \|e_i(t)\|^2 + \|e_i(t)\| \theta_{i2} + e_i^T(t) \tilde{w}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \\ &\quad - \alpha_i^{-1} \sigma_{ri}^T(\hat{x}_{iD}(t)) \tilde{w}_{ri} \dot{\hat{w}}_{ri}^T \sigma_{ri}(\hat{x}_{iD}(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

将式(21)代入式(24)可得

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{i1}(t) &\leq -(\lambda_{\min}(\boldsymbol{\pi}_i) - h_{yf}) \|\mathbf{e}_i(t)\|^2 + \|\mathbf{e}_i(t)\| \theta_{i2} + \mathbf{e}_i^\top(t) \tilde{\mathbf{w}}_{ri}^\top \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \\
&\quad - \boldsymbol{\sigma}_{ri}^\top(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \mathbf{e}_i^\top(t) \tilde{\mathbf{w}}_{ri}^\top \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \\
&\leq \|\mathbf{e}_i(t)\| \left( (h_{yf} - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\pi}_i)) \|\mathbf{e}_i(t)\| + \theta_{i2} \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_i^\top(t) \tilde{\mathbf{w}}_{ri}^\top \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \left[ 1 - \boldsymbol{\sigma}_{ri}^\top(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

因此, 若使得  $\dot{L}_{i1}(t) < 0$  成立, 则需要使得条件  $\boldsymbol{\sigma}_{ri}^\top(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) \boldsymbol{\sigma}_{ri}(\hat{\mathbf{x}}_{iD}(t)) = 1$  成立且  $\mathbf{e}_i(t)$  属于以下紧集:

$$\Omega_{\mathbf{e}_i(t)} = \left\{ \mathbf{e}_i(t) : \|\mathbf{e}_i(t)\| > \frac{\theta_{i2}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\pi}_i) - h_{yf}} \right\} \tag{26}$$

需注意  $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\pi}_i) > h_{yf}$ 。根据 Lyapunov 方法, 通过对未知不匹配互联项的近似和替换, 可得出观测误差为 UUB。证毕。

### 3.2 评判神经网络

由于式(5)中的  $\hat{k}_i \left\| (\nabla J_i(\mathbf{x}_i))^\top \right\| E_i$  不是完全已知的, 这需要使用 NN 进行逼近。首先, 用评判 NN 近似(9)中代价函数  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  可得

$$J_i^*(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}_{ci}^\top \boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i) + \xi_{ci}(\mathbf{x}_i) \tag{27}$$

其中,  $\mathbf{w}_{ci} \in \mathbf{R}^{l_i}$  是理想权值向量,  $\boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i)$  为激活函数,  $l_i$  是隐藏层中的神经元个数,  $\xi_{ci}(\mathbf{x}_i)$  是近似误差。然后,  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  的梯度表示为

$$\nabla J_i^*(\mathbf{x}_i) = (\nabla \boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i))^\top \mathbf{w}_{ci} + \nabla \xi_{ci}(\mathbf{x}_i) \tag{28}$$

其中,  $\nabla \boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i)$  和  $\nabla \xi_{ci}(\mathbf{x}_i)$  分别是激活函数和近似误差的梯度。基于(11)和(28), 带有输入约束的控制策略可以表示为

$$\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i) = -\eta_i \tanh(D_1(\mathbf{x}_i)) + \bar{\boldsymbol{\phi}} + \xi_{u_i^*}(\mathbf{x}_i) \tag{29}$$

式中  $D_1(\mathbf{x}_i) = (1/2\eta_i) \mathbf{g}_i^\top(\mathbf{x}_i) (\nabla \boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i))^\top \mathbf{w}_{ci}$ ,  $\xi_{u_i^*}(\mathbf{x}_i)$  的表达式为

$$\xi_{u_i^*}(\mathbf{x}_i) = -\frac{1}{2} (\mathbf{I}_{m_i} - \mathbf{A}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_i))) \mathbf{g}_i^\top(\mathbf{x}_i) \nabla \xi_{ci}(\mathbf{x}_i) \tag{30}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)) = \text{diag}\{\tanh^2(v_d(\mathbf{x}_i))\}$  ( $d = 1, 2, \dots, m_i$ ),  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \triangleq [v_1(\mathbf{x}_i), v_2(\mathbf{x}_i), \dots, v_{m_i}(\mathbf{x}_i)]^\top \in \mathbf{R}^{m_i}$  且  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)$  中各个分量值介于  $(1/2\eta_i) \mathbf{g}_i^\top(\mathbf{x}_i) \nabla J_i^*(\mathbf{x}_i)$  和  $D_1(\mathbf{x}_i)$  对应分量值之间。由于不能预先获得(27)中的理想权值向量, 因此  $J_i^*(\mathbf{x}_i)$  的估计值表示为

$$\hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i) = \hat{\mathbf{w}}_{ci}^\top \boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i) \tag{31}$$

其中,  $\hat{\mathbf{w}}_{ci} \in \mathbf{R}^{l_i}$  是估计权值向量且  $\hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i)$  的梯度向量为

$$\nabla \hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i) = (\nabla \boldsymbol{\sigma}_{ci}(\mathbf{x}_i))^\top \hat{\mathbf{w}}_{ci} \tag{32}$$

对于互联子系统(1), 哈密顿函数为



$$H_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i), \mathbf{w}_{ci}) = \hat{k}_i \|(\nabla \hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i))^\top E_i + U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i)) + \mathbf{w}_{ci}^\top \nabla \sigma_{ci}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i = e_{chi} \quad (33)$$

其中,  $e_{chi} = -\hat{k}_i \left( \left\| (\nabla \hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| - \left\| (\nabla \hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i))^\top \right\| \right) E_i - (\nabla \xi_{ci}(\mathbf{x}_i))^\top \dot{\mathbf{x}}_i$  是评判网络的残差。对于互联子系统(1), 近似的哈密顿函数可以表示为

$$\hat{H}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i), \hat{\mathbf{w}}_{ci}) = \hat{k}_i \|(\nabla \hat{J}_i^*(\mathbf{x}_i))^\top E_i + U_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}_i)) + \hat{\mathbf{w}}_{ci}^\top \nabla \sigma_{ci}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i = e_{ci} \quad (34)$$

其中,  $e_{ci}$  是评判网络的近似误差。带有输入约束的近似控制策略表示为

$$\hat{\mathbf{u}}_i^*(\mathbf{x}_i) = -\eta_i \tanh(D_2(\mathbf{x}_i)) + \bar{\phi} \quad (35)$$

其中,  $D_2(\mathbf{x}_i) = (1/2\eta_i) \mathbf{g}_i^\top(\mathbf{x}_i) (\nabla \sigma_{ci}(\mathbf{x}_i))^\top \hat{\mathbf{w}}_{ci}$ 。为了最小化目标函数  $E_{ci} = (1/2) \mathbf{e}_{ci}^\top \mathbf{e}_{ci}$ , 采用最速下降算法更新评判 NN 的权值向量, 相应更新律为

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_{ci} = -\beta_i e_{ci} \chi_{i3} \quad (36)$$

其中,  $\beta_i$  是评判网络的学习率且  $\chi_{i3} = \nabla \sigma_{ci}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i$ 。然后, 结合式(33)和(34)并定义权值近似误差  $\tilde{\mathbf{w}}_{ci} = \mathbf{w}_{ci} - \hat{\mathbf{w}}_{ci}$ , 可得

$$e_{ci} = e_{chi} - \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \chi_{i3} \quad (37)$$

则评判 NN 权值近似误差的更新律为

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{ci} = -\dot{\hat{\mathbf{w}}}_{ci} = \beta_i (e_{chi} - \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \chi_{i3}) \chi_{i3} \quad (38)$$

**定理 3** 考虑互联子系统(1), 评判网络权值更新方式为(36), 则可以保证权值近似误差向量为 UUB。

**证明:** 选择 Lyapunov 函数

$$L_{i2} = \frac{1}{2\beta_i} \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \tilde{\mathbf{w}}_{ci} \quad (39)$$

它的导数表示为

$$\begin{aligned} \dot{L}_{i2} &= \frac{1}{\beta_i} \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{ci} \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top (e_{chi} - \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \chi_{i3}) \chi_{i3} \\ &= \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top e_{chi} \chi_{i3} - \left\| \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \chi_{i3} \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} e_{chi}^2 - \frac{1}{2} \left\| \tilde{\mathbf{w}}_{ci}^\top \chi_{i3} \right\|^2 \end{aligned} \quad (40)$$

因此, 当  $\dot{L}_{i2} < 0$  成立, 则  $\tilde{\mathbf{w}}_{ci}$  属于以下紧集:

$$\Omega_{\tilde{\mathbf{w}}_{ci}} = \left\{ \tilde{\mathbf{w}}_{ci} : \left\| \tilde{\mathbf{w}}_{ci} \right\| > \left\| \frac{e_{chi}}{\chi_{iM}} \right\| \right\} \quad (41)$$

其中,  $\left\| \chi_{i3} \right\| \geq \chi_{iM}$  存在下界且  $\chi_{iM}$  是一个正常数。基于 Lyapunov 稳定性定理, 权值向量的近似误差为 UUB。证毕。

由于 RBFNN 的收敛速度高于反向传播神经网络的收敛速度，因此所用到的状态观测器(19)采用了 RBFNN。然而，为了减轻计算负担，选择反向传播 NN 作为评判 NN 以近似代价函数。因此，综合考虑收敛速度和计算负担，本文选择了两个不同结构的 NN。

#### 4 仿真实验

在本节中，仿真实验在 MATLAB 环境下实现，用于验证所提分散控制方法的有效性，以下给出了具有未知不匹配互联非线性系统的仿真实例，以验证本文所提出带有输入约束分散控制方法的有效性。

考虑如下大规模互联非线性系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \begin{bmatrix} -x_{11} + x_{12} \\ -(x_{11} + x_{12}) - x_{12}(\cos(2x_{11}) + 1)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(2x_{11}) \end{bmatrix} u_1(\mathbf{x}_1) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ (x_{11} + x_{22})\sin x_{12}^2 \cos(0.5x_{21}) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \begin{bmatrix} -x_{21} + x_{22} \cos(2x_{21}) \\ -(x_{21} + x_{22}) + x_{22} \sin x_{21}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u_2(\mathbf{x}_2) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5(x_{12} + x_{22}) \cos(e^{x_{21}^2}) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (42)$$

其中， $\mathbf{x}_1 = [x_{11}, x_{12}]^T \in \mathbf{R}^2$  和  $\mathbf{x}_2 = [x_{21}, x_{22}]^T \in \mathbf{R}^2$  是两个子系统的状态， $u_1(\mathbf{x}_1) \in \mathbf{R}$  和  $u_2(\mathbf{x}_2) \in \mathbf{R}$  是两个子系统的非对称控制输入。假设不匹配互联项是未知的，设置系统的初始状态为  $\mathbf{x}_{10} = [1, -1]^T$  和  $\mathbf{x}_{20} = [0.5, -0.5]^T$ ，两个子系统的状态观测器的状态为  $\hat{\mathbf{x}}_1 = [\hat{x}_{11}, \hat{x}_{12}]^T \in \mathbf{R}^2$  和  $\hat{\mathbf{x}}_2 = [\hat{x}_{21}, \hat{x}_{22}]^T \in \mathbf{R}^2$ ，且初始状态分别为  $\hat{\mathbf{x}}_{10} = [0.5, -0.5]^T$  和  $\hat{\mathbf{x}}_{20} = [1, -1]^T$ 。另外，选择耦合子系统的参考状态为  $x_{id} = 0, i = 1, 2$ 。在该实验中，选择 RBFNN 近似局部状态观测器的状态，将 RBFNN 的可调权值矩阵设为二维方阵则对于这两个子系统，可选择 RBFNN 的激活向量为  $\sigma_{ri}(\mathbf{x}(t)) = [\sigma_{r1i}(\mathbf{x}(t)), \sigma_{r2i}(\mathbf{x}(t))]^T, i = 1, 2$ 。其中，基函数宽度设置为  $a_{i1} = a_{i2} = 1, i = 1, 2$ 。基函数的中心常数向量设置为  $\mathbf{b}_{11} = \mathbf{b}_{21} = [0.5, -0.5]^T$  和  $\mathbf{b}_{12} = \mathbf{b}_{22} = [0, 0]^T$ 。与此同时，利用结构为 2-3-1 的评判 NN 近似改进的代价函数。其中权值向量为  $\mathbf{w}_{ci} = [w_{ci1}, w_{ci2}, w_{ci3}]^T$  且初始值设定为  $\mathbf{w}_{c1} = [2.3, 5.7, 4.8]^T$  和  $\mathbf{w}_{c2} = [2, 3.1, 3.6]^T$ 。选择评判 NN 的激活函数为  $\sigma_{c1}(\mathbf{x}_1) = [x_{11}^2, x_{11}x_{12}, x_{12}^2]^T$  和  $\sigma_{c2}(\mathbf{x}_2) = [x_{21}^2, x_{21}x_{22}, x_{22}^2]^T$ 。此外，令  $Q_i = 2I$  且  $k_i = 1, i = 1, 2$ 。对于子系统 1 和子系统 2，有关 RBFNN 的学习率分别设置为  $\alpha_1 = 3$  和  $\alpha_2 = 0.05$ ，评判 NN 的学习率分别设置为  $\beta_1 = 0.1$  和  $\beta_2 = 0.2$ 。除此之外，令状态观测器增益矩阵为  $\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_2 = I_2$ ，其中  $I_2$  表示二维的单位矩阵。

本文的仿真结果如图 1 到图 9 所示。图 1 为两个子系统的评判 NN 权值收敛曲线。图 2 为两个子系统的 RBFNN 权值收敛曲线。为了使得系统满足持续激励条件，在 300 个时间步内添加了探测信号以进行在线权值训练。由图 1 可知，在 300 步之前各个子系统的权值已经收敛，子系统 1 和子系统 2 的权值分别收敛于  $[3.49194, 5.33073, 10.9404]^T$  和  $[2.59819, 3.79236, 15.6425]^T$ ，这验证了权值更新规则的有效性。另外，由图 1 和图 2 对比可知，RBFNN 在线权值训练的效率远高于评判 NN，因此选择了 RBFNN 来近似状态观测器。图 3 展示了子系统 1 和子系统 2 的非对称控制输入曲线，通过选择参数  $\eta_i = 2$  和  $\phi_i = 1, i = 1, 2$  可得不对称控制输入约束的范围为  $-1 \sim 3$ 。因此，图 3 所示的实验结果与理论推导结论相符。图 4 为引入状态观测器(19)所产生的状态估计误差曲线，从

图中得出系统状态误差最终趋于原点，这验证了状态观测器可以在线精确地近似未知互联项。最后，图 5 展示了子系统的状态轨迹曲线，从图中可知在 5 个时间步内，系统状态便收敛到了平衡点，即本文所研究的分散控制方法可以快速镇定大规模系统。因此，仿真结果验证了所提出分散控制方法的有效性。

综上所述，本文所提出的方法可以满足未知不匹配大规模系统的非对称控制输入约束，同时也保证了互联系统中各个子系统的状态满足 UUB 稳定。由参考文献[23]可知本文在已有代价函数的基础上进行了一定改进，从而满足非对称控制约束条件。对于未知不匹配分散系统，为了体现在非对称控制约束下本文所提算法的先进性，利用文献[23]中未改进的代价函数以及无控制约束下的控制策略，进行了相关对比实验。其中，本次对比实验的环境是在仿真系统(42)以及相关参数设定不变的情况下进行的。所得出的对比实验结果依次如图 6 到图 9 所示。可以得出，当利用[23]中的算法时，虽然图 6 所示的在线评判 NN 权值训练速率比图 1 快，但对比图 3 和图 7 可知：在控制系统方面，本文引入改进代价函数所得控制策略的控制效果更好，即在较短的时间内更高效地镇定系统。图 8 和图 9 分别展示了代价函数未改进情况下系统的状态估计误差曲线和子系统状态轨迹曲线。与图 4 和图 5 对比可知，两个子系统的估计误差以及状态轨迹最终都趋于原点且趋于原点的速率差别不大，即改进后的非对称约束控制器能够迅速镇定系统。

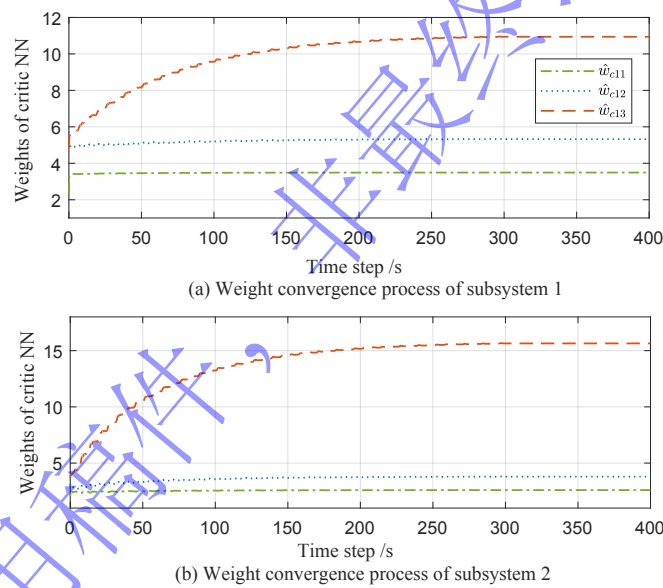


图 1 评判 NN 权值收敛曲线. (a) 子系统 1 权值收敛过程; (b) 子系统 2 权值收敛过程

Fig.1 Convergence curves of weights of the critic NN: (a) the weight convergence process of subsystem 1; (b) the weight convergence process of subsystem 2

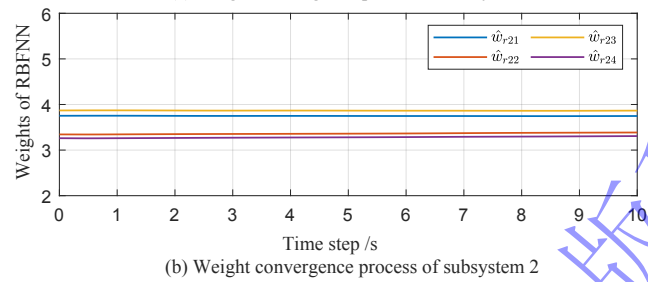
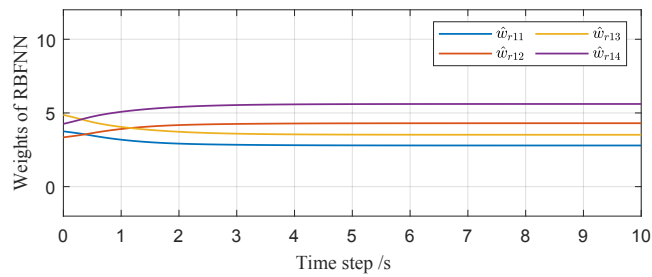


图2 RBFNN 权值收敛曲线. (a) 子系统 1 权值收敛过程; (b) 子系统 2 权值收敛过程

Fig.2 Convergence curves of weights of the RBFNN: (a) the weight convergence process of subsystem 1; (b) the weight convergence process of subsystem 2

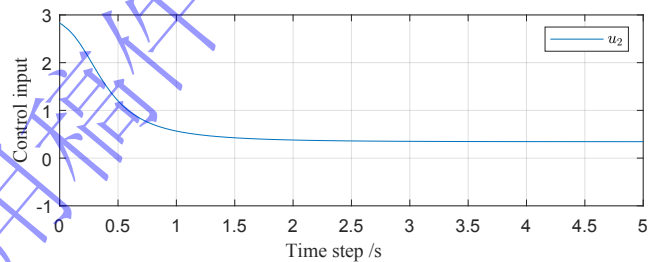
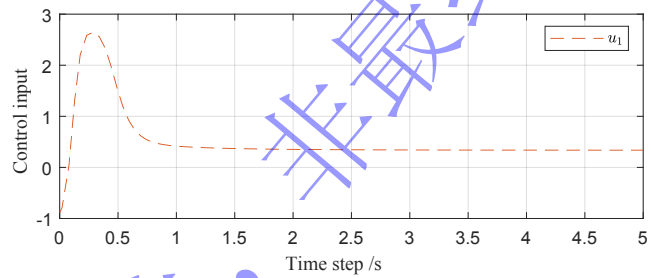
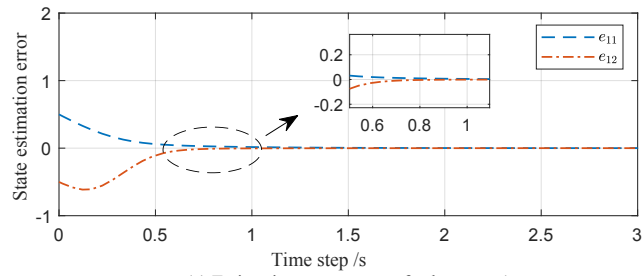
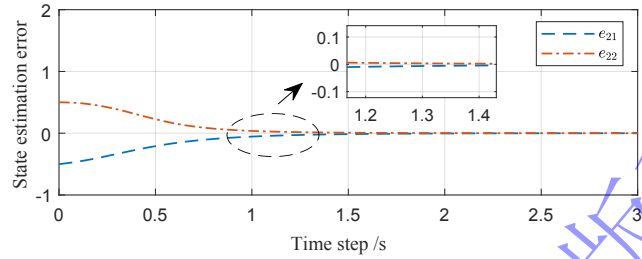


图3 非对称控制输入曲线. (a) 子系统 1 控制输入曲线; (b) 子系统 2 控制输入曲线

Fig.3 Curves of the asymmetrical control input: (a) the control input curve of subsystem 1; (b) the control input curve of subsystem 2



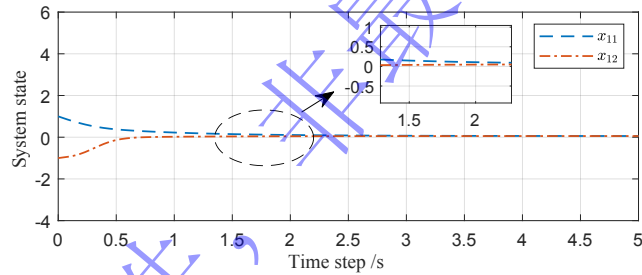
(a) Estimation error curve of subsystem 1



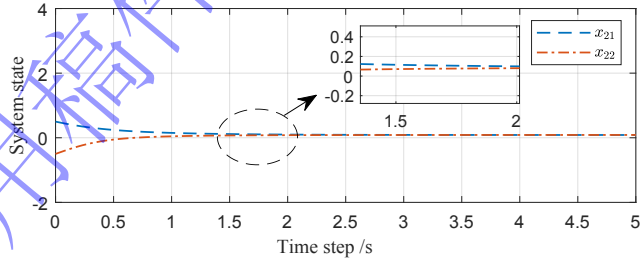
(b) Estimation error curve of subsystem 2

图4 状态估计误差曲线。(a) 子系统1估计误差曲线; (b) 子系统2估计误差曲线

Fig.4 Curves of state estimation errors: (a) the estimation errors curve of subsystem 1; (b) the estimation errors curve of subsystem 2



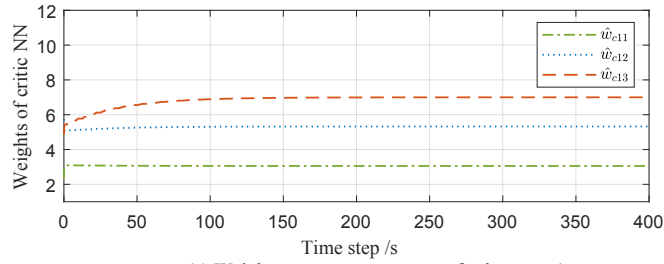
(a) State trajectory of subsystem 1



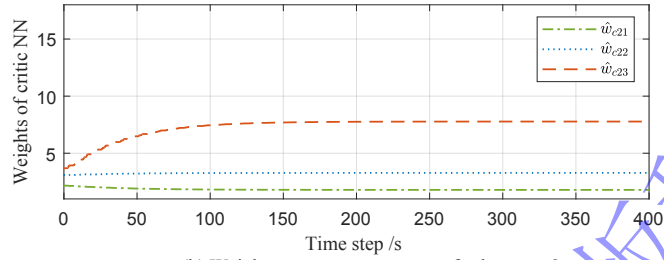
(b) State trajectory of subsystem 2

图5 系统状态轨迹曲线。(a) 子系统1状态轨迹; (b) 子系统2状态轨迹

Fig.5 Curves of system state trajectories : (a) the state trajectory of subsystem 1; (b) the state trajectory of subsystem 2



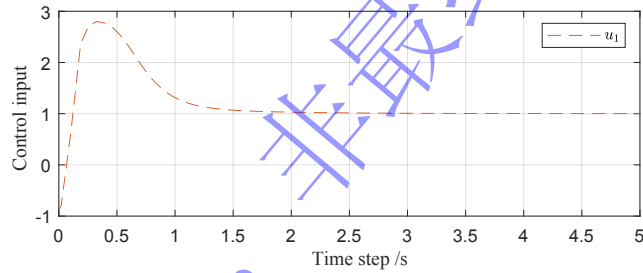
(a) Weight convergence process of subsystem 1



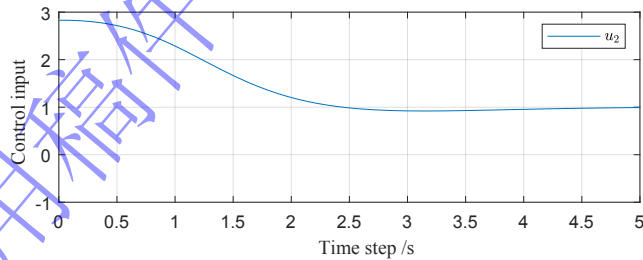
(b) Weight convergence process of subsystem 2

图6 评判 NN 权值收敛曲线. (a) 子系统 1 权值收敛过程; (b) 子系统 2 权值收敛过程

Fig.6 Convergence curves of weights of the critic NN: (a) the weight convergence process of subsystem 1; (b) the weight convergence process of subsystem 2



(a) Control input curve of subsystem 1

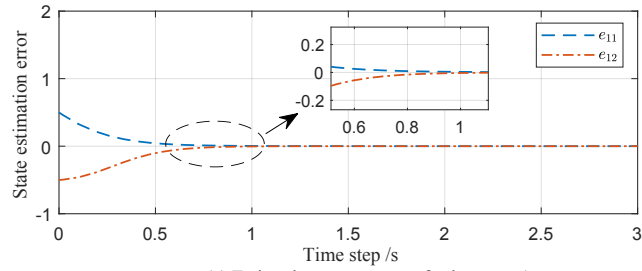


(b) Control input curve of subsystem 2

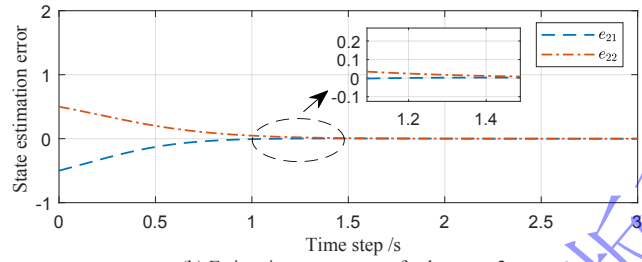
图7 控制输入曲线. (a) 子系统 1 控制输入曲线; (b) 子系统 2 控制输入曲线

Fig.7 Curves of the control input: (a) the control input curve of subsystem 1; (b) the control input curve of subsystem 2





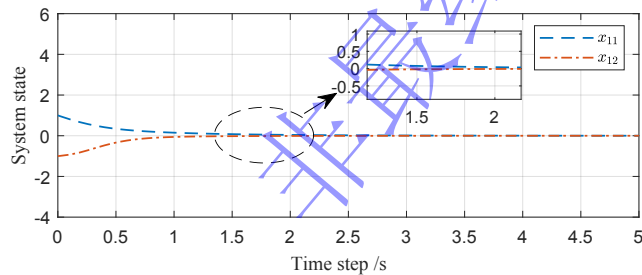
(a) Estimation error curve of subsystem 1



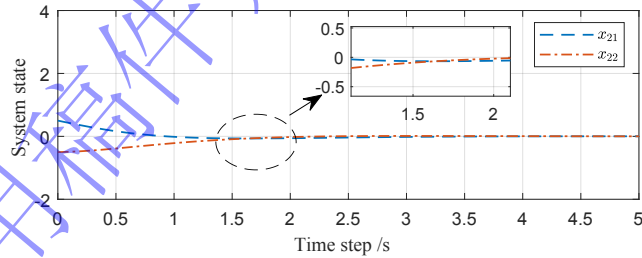
(b) Estimation error curve of subsystem 2

图 8 状态估计误差曲线. (a) 子系统 1 估计误差曲线; (b) 子系统 2 估计误差曲线

Fig.8 Curves of state estimation errors: (a) the estimation errors curve of subsystem 1; (b) the estimation errors curve of subsystem 2



(a) State trajectory of subsystem 1



(b) State trajectory of subsystem 2

图 9 系统状态轨迹曲线. (a) 子系统 1 状态轨迹; (b) 子系统 2 状态轨迹

Fig.9 Curves of system state trajectories: (a) the state trajectory of subsystem 1; (b) the state trajectory of subsystem 2

## 5 结论

本文针对连续时间具有未知不匹配互联的大规模非线性系统，提出了一种基于 ADP 的非对称约束分散控制方案。为了消除互联项存在上界这一普遍假设，本文建立了状态观测器，通过孤立子系统的状态和耦合子系统的参考状态近似互联项。然后，通过评判 NN 近似改进的局部代价函数以获得不对称输入约束条件下的最优控制策略。其中，利用 Lyapunov 稳定性定理推导出的不对称输入约束控制器能够快速地镇定大规模分散系统；同时也保证了大规模系统的观测误差和权值近似误

差为 UUB。最后，仿真结果表明所提出的分散控制方法是有效的。与此同时，通过对比实验也表明了所提非对称输入约束分散控制方法的先进性。

## 参考文献

- [1] Bakule L. Decentralized control: An overview. *Annual Reviews Control*, 2008, 32(1): 87
- [2] Wang H Q, Liu X P, Liu K F. Robust adaptive neuraltracking control for a class of stochastic nonlinear interconnected systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 27(3): 510
- [3] Zhao B, Li Y C, Liu D R. Self-tuned local feedback gain based decentralized fault tolerant control for a class of large-scale nonlinear systems. *Neurocomputing*, 2017, 235: 147
- [4] Wang D, Hu L Z, Zhao M M, et al. Dual event-triggered constrained control through adaptive critic for discrete-time zero-sum games. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(3): 1584
- [5] Wang D, Li X, Zhao M M, et al. Adaptive critic control design with knowledge transfer for wastewater treatment applications. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2024, 20(2): 1488
- [6] Wang D, Wang J Y, Zhao M M, et al. Adaptive multi-step evaluation design with stability guarantee for discrete-time optimal learning control. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2023, 10(9): 1797
- [7] Wang D, Ren J, Ha M M, et al. System stability of learning-based linear optimal control with general discounted value iteration. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, 34(9):6504
- [8] Zhao M M, Wang D, Qiao J F, et al. Advanced value iteration for discrete-time intelligent critic control: A survey. *Artificial Intelligence Review*, 2023, 56(10): 12315
- [9] Wang D, Hu L Z, Zhao M M, et al. Event-triggered control design for optimal tracking of unknown nonlinear zero-sum games. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(1): 91  
(王鼎, 胡凌治, 赵明明, 等. 未知非线性零和博弈最优跟踪的事件触发控制设计. 自动化学报, 2023, 49(1): 91)
- [10] Liu D R, Xue S, Zhao B, et al. Adaptive dynamic programming for control: A survey and recent advances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(1): 142
- [11] Wang D, Ha M M, and Zhao M M. The intelligent critic framework for advanced optimal control. *Artificial Intelligence Review*, 2022, 55(1): 1
- [12] Liu D R, Wang D, Li H L. Decentralized stabilization for a class of continuous-time nonlinear interconnected systems using online learning optimal control approach. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, 25(2): 418
- [13] Yang X, He H B. Adaptive critic learning and experience replay for decentralized event-triggered control of nonlinear interconnected systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, 50(11): 4043
- [14] Wang D, Gao N, Liu D R, et al. Recent progress in reinforcement learning and adaptive dynamic programming for advanced control applications. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2024, 11(1): 18
- [15] Ha M M, Wang D, Liu D R. Discounted iterative adaptive critic designs with novel stability analysis for tracking control. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2022, 9(7): 1262
- [16] Wang D, Li X. Transferable incremental heuristic dynamic programming with wastewater treatment applications. *Journal of Beijing University of Technology*, in press  
(王鼎, 李鑫. 迁移增量启发式动态规划及污水处理应用. 北京工业大学学报, 印刷中)
- [17] Wang D, Zhao H L, Li X. Adaptive critic control for wastewater treatment systems based on multi-objective particle swarm optimization. *Chinese Journal of Engineering*, <https://doi.org/10.13374/j.issn2095-9389.2023.04.15.001>  
(王鼎, 赵慧玲, 李鑫. 基于多目标粒子群优化的污水处理系统自适应评判控制. 工程科学学报, 2024, 46(5): 908)
- [18] Chen S M, Lu J S, Gao Y L. Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability. *Control and Decision*, 2021, 36(6): 1407

- (陈世明, 卢家胜, 高彦丽. 基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制. *控制与决策*, 2021, 36(6): 1407)
- [19] Huo Y, Wang D, Qiao J F. Robust tracking control for nonlinear systems based on critic learning formulation with single network. *Control and Decision*, 2023, 38(11): 3066  
(霍煜, 王鼎, 乔俊飞. 基于单网络评判学习的非线性系统鲁棒跟踪控制. *控制与决策*, 2023, 38(11): 3066)
- [20] Wang D. Event-based iterative neural control for a type of discrete dynamic plant. *Chinese Journal of Engineering*, 2022, 44(3): 411  
(王鼎. 一类离散动态系统基于事件的迭代神经控制. *工程科学学报*, 2022, 44(3): 411)
- [21] Yang X, Zhou Y J, Dong N, et al. Adaptive critics for decentralized stabilization of constrained-input nonlinear interconnected systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, 52(7): 4187
- [22] Yang X, Zhu Y H, Dong N, et al. Decentralized event-driven constrained control using adaptive critic designs. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2022, 33(10): 5830
- [23] Zhao B, Wang D, Shi G, et al. Decentralized control for large-scale nonlinear systems with unknown mismatched interconnections via policy iteration. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(10): 1725
- [24] Luo F C, Zhao B, Liu D R. Event-triggered decentralized optimal fault tolerant control for mismatched interconnected nonlinear systems through adaptive dynamic programming. *Optimal Control Applications & Methods*, 2021, 42(5): 1365
- [25] Yang X, He H B, Zhong X N. Approximate dynamic programming for nonlinear-constrained optimizations. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(5): 2419
- [26] Tan L N. Event-triggered distributed H-infinity constrained control of physically interconnected large-scale partially unknown strict-feedback systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4): 2444