

# T-S 模糊控制系统的虚拟等价系统及稳定性判据

张维存 李 擎<sup>✉</sup> 张 超 陈 鹏 刘小丽

北京科技大学自动化学院, 北京 100083

<sup>✉</sup>通信作者, E-mail: liqing@ies.ustb.edu.cn

**摘 要** 针对未知确定性被控对象和未知非线性时变对象,通过构造虚拟等价系统的方法研究 T-S 模糊控制系统的稳定性. 采用虚拟等价系统的目的在于降低原问题的难度,改进现有稳定性判据的保守性. 分析结果表明, T-S 模糊控制系统的稳定性主要取决于局部模型的精度、模糊规则的正确性以及局部控制器的镇定性.

**关键词** 控制系统; 模糊控制; 稳定性判据; 等价系统

**分类号** TP273+.4

## Virtual equivalent system and stability criteria for T-S model based fuzzy control systems

ZHANG Wei-cun, LI Qing<sup>✉</sup>, ZHANG Chao, CHEN Peng, LIU Xiao-li

School of Automation, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

<sup>✉</sup>Corresponding author, E-mail: liqing@ies.ustb.edu.cn

**ABSTRACT** The stability of a T-S model based fuzzy control system for both the discrete, linear time-invariant object and the nonlinear time-varying object is analyzed with the help of constructing a related virtual equivalent system. The purpose of adopting the virtual equivalent system is to reduce the difficulty of analyzing the stability of the fuzzy control system and to improve the conditions of existing stability criteria. The results indicate that the stability of the fuzzy control system depends on the precision of local models, the effectiveness of fuzzy rules, and the stabilizing characteristic of each local controller.

**KEY WORDS** control systems; fuzzy control; stability criteria; equivalent systems

模糊控制近年来在理论和实践两方面均得到了蓬勃发展,但仍然存在一些问题有待进一步研究,主要是尚未形成完善的稳定性和鲁棒性分析方法以及系统的设计方法,包括模糊规则的获取和优化以及隶属函数的选取等.

任何一个自动控制系统要正常工作,首先必须是稳定的,对模糊控制系统来说依然如此. 由于模糊系统本质上的非线性和缺乏统一的系统描述,人们难以利用现有的控制理论和分析方法对模糊控制系统进行分析和设计,因此其稳定性分析一直是一个难点课题. T-S 模糊控制系统<sup>[1]</sup>的提出为模糊控制领域带来了新的曙光,其实质在于将“模糊”从控制系统的底层提升到了高层,“模糊”不再直接参与控制,而是参与控制的“调度”,真正执行控制的底

层则基于线性系统模型进行设计,这样一来就有可能利用成熟的控制理论成果来分析模糊控制系统的稳定性. 正因为如此,关于 T-S 模糊系统的稳定性分析近年来成为众多研究人员关注的热点,发表的论文很多,提出了各种思想和分析方法<sup>[2]</sup>,例如公共李雅普诺夫函数法<sup>[3]</sup>、分段李雅普诺夫函数法<sup>[4-6]</sup>和模糊李雅普诺夫函数法<sup>[7-11]</sup>. 但是,正如文献<sup>[2]</sup>所指出的,上述几种分析方法都还存在一定的保守性,仍然有待进一步探索更加具有通用性和实用性的分析方法.

本文基于虚拟等价系统<sup>[12]</sup>提出一种分析和判断模糊控制系统稳定性的新途径. 虚拟等价系统的概念和方法起源于分析自适应控制系统的稳定性和收敛性. 现有的自适应控制系统的稳定性、收敛性

和鲁棒性定理的成立条件都过于苛刻,实际应用的自适应控制系统很难满足这些条件,因而缺乏实际上的指导意义. 为了改变上述缺陷,虚拟等价系统应运而生,其特点是给出的稳定性和收敛性条件是可以在线计算和监控的. 所谓的虚拟等价系统就是一种人为构造的、输入-输出意义上与原系统等价的系统,由于虚拟等价系统的结构特点,使得它比原系统易于分析和处理. 通过它可以将原来的非线性主导(结构非线性)问题转化为一个线性主导(结构线性、补偿信号非线性)问题,进而降低解决原问题的难度. 本文首先考虑线性时不变(LTI)确定性受控对象,给出相应的稳定性判据;然后在此基础上,考虑非线性时变不确定对象,给出相应的稳定性判据.

### 1 LTI 被控对象的模糊控制系统稳定性

#### 1.1 T-S 模糊控制系统的虚拟等价系统

T-S 模型最早是由 Takagi 和 Sugeno<sup>[1]</sup> 提出的,规则输出段采用加权方法或切换方法,这里考虑加权方法,即所谓的并行分布补偿(PDC)方法.

$R^l$ : IF  $z_1$  is  $F_1^l$ ,  $z_2$  is  $F_2^l$ , and  $\dots$ ,  $z_v$  is  $F_v^l$ ,

$$\text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t), \\ y(t) = C_l x(t), \\ l \in L = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

其中,  $R^l$  为第  $l$  条模糊推理规则,  $m$  为模糊规则的数目,  $F_j^l (j=1, 2, \dots, v)$  为模糊集合,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  为状态向量,  $u(t) \in \mathbf{R}^p$  为输入向量,  $y(t) \in \mathbf{R}^q$  为输出向量,  $(A_l, B_l, C_l)$  为第  $l$  个局部模型的矩阵.  $z(t) = [z_1, z_2, \dots, z_v]$  为系统的可测变量,例如  $z(t)$  可以取为状态变量. 把局部模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_l x(t) + B_l u(t), \\ y(t) = C_l x(t) \end{cases}$$

简记为  $M_l, l \in L = 1, 2, \dots, m$ . 在此基础上设计出多个局部控制器  $C_l$ , 其输出为局部控制量  $u_l(t) = K_l x(t)$ ,  $K_l$  为局部控制器的反馈增益矩阵,全局控制量由下式决定:

$$u(t) = \sum_{l=1}^m \mu_l(t) u_l(t).$$

加权系数  $\mu_l, l=1, 2, \dots, m$  是归一化的隶属度函数,满足以下条件:

$$\mu_l = \frac{\xi_l(z)}{\sum_{j=1}^m \xi_j(z)}, \quad \xi_l(z) = \prod_{i=1}^v F_i^l(z_i),$$

$$\mu_l \geq 0, \quad \sum_{l=1}^m \mu_l = 1.$$

式中,  $F_i^l(z_i)$  为  $z_i$  在模糊集  $F_i^l$  中的隶属度.

这类模糊系统采用多个局部线性系统模型实现整体上的非线性,形式简单,易于工程应用.

用如图 1 所示的系统方框图来描述这类模糊控制系统的结构特征. 其中,  $\Sigma_p$  为未知的被控对象,这里将状态空间模型等同于传递函数模型看待.

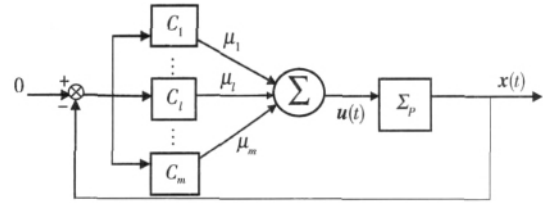


图 1 T-S 模糊控制系统的结构图

Fig. 1 Structure block diagram of a T-S model based fuzzy control system

从图 1 可以看出基于 T-S 模型的模糊控制系统与加权多模型自适应控制系统非常相似,实际上它与增益调度控制也存在结构相似性.

图 1 中,  $\mu_l, l=1, 2, \dots, m$  实际上代表了对被控对象的“辨识”,考虑被控对象为未知确定性的 LTI 系统,若模糊规则设计合理,那么设计各个子控制器所针对的局部模型中必定包含被控对象的真实模型,不妨记为  $M_l$ ,而且该模型所对应的归一化隶属度函数  $\mu_l$  将最终取值为“1”,而其余的归一化隶属度函数  $\mu_i, i \neq l$  将最终取值为“0”. 在此条件下,为了便于分析和理解,人为构造图 1 所示系统的输入输出意义上的等价系统,即所谓的虚拟等价系统,如图 2 所示. 图中,  $u_l(t)$  为  $C_l$  产生的输出,  $u(t)$  同图 1,  $\Delta u(t) = u(t) - u_l(t)$ .

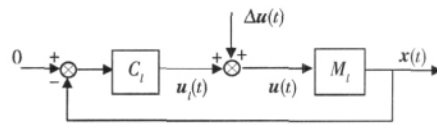


图 2 T-S 模糊控制系统的虚拟等价系统

Fig. 2 Virtual equivalent system for the T-S model based fuzzy control system

#### 1.2 主要结果

**定理 1** 针对未知确定性被控对象  $P$ (LTI) 的 T-S 模糊控制系统,若满足以下条件,则是全局渐近稳定的:

- (1) 模糊规则中的局部模型能够覆盖被控对象的不确定性,即被控对象的真实模型包含在  $m$  个局部模型当中;
- (2) 模糊规则的隶属度函数能够识别或辨识真实的对象模型,即对应于真实模型的归一化隶属度函数最终为 1,其余为 0;

(3) 每个局部控制器镇定它所对应的局部模型.

**证明** 由定理的三个条件,不妨记被控对象的真实模型为  $M_l$ ,相应地有:  $\mu_l \rightarrow 1; \mu_i \rightarrow 0, i \in L, i \neq l$ . 在此条件下,推导图 2 中  $\Delta u(t) = u(t) - u_l(t)$  的性质:

$$\Delta u(t) = u(t) - u_l(t) = \sum_{i=1}^m \mu_i K_i x(t) - K_l x(t) = \mu_1 K_1 x(t) + \dots + \mu_l K_l x(t) + \dots + \mu_m K_m x(t) - K_l x(t) = o(\|x(t)\|).$$

接下来,由于如图 2 所示虚拟等价系统是一个线性定常系统,故可分解为图 3 和图 4 两个子系统.

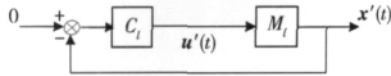


图 3 虚拟等价系统的分解子系统 I

Fig.3 Decomposed subsystem I of the virtual equivalent system

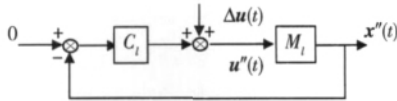


图 4 虚拟等价系统的分解子系统 II

Fig.4 Decomposed subsystem II of the virtual equivalent system

图 1 和图 2 系统的初始状态为  $x(0)$ ,图 3 和图 4 系统的初始状态分别为  $x'(0)$  和  $x''(0)$ ,且满足  $x(0) = x'(0) + x''(0)$ ,由条件(3)可知,如图 3 所示系统为全局渐近稳定系统,即存在  $c > 0, \lambda > 0$ ,使得  $\|x'(t)\| \leq ce^{-\lambda t} \|x'(0)\|$ .

对于图 4 所示系统,由于闭环系统稳定,必有<sup>[13]</sup>

$$\|x''(t)\| = O(\|\Delta u(t)\|),$$

且输入信号满足

$$\Delta u(t) = o(\|x(t)\|).$$

因此有

$$x''(t) = o(\|x(t)\|),$$

由线性叠加定理有

$$x(t) = x'(t) + x''(t),$$

进一步得到

$$0 \leq \|x(t)\| \leq \|x'(t)\| + \|x''(t)\| = \|x'(t)\| + o(\|x(t)\|).$$

下面用反证法证明  $\|x(t)\|$  有界,即  $\|x(t)\| < \infty$ ,为此反设  $\|x(t)\|$  无界,因此必有无穷子列  $\|x(t_k)\| \rightarrow \infty$ ,且满足

$$0 \leq \|x(t_k)\| \leq \|x'(t_k)\| + o(\|x(t_k)\|).$$

上式两端同除以  $\|x(t_k)\|$ ,得到

$$0 \leq \frac{\|x(t_k)\|}{\|x(t_k)\|} \leq \frac{\|x'(t_k)\|}{\|x(t_k)\|} + o(1).$$

由于  $\|x'(t_k)\|$  有界,所以上式意味着一个错误结论

$$\frac{\|x(t_k)\|}{\|x(t_k)\|} \rightarrow 0.$$

因此原假设  $\|x(t)\|$  无界不能成立,于是证得

$$\|x(t)\| < \infty,$$

从而

$$x(t) \rightarrow x^*(t),$$

即虚拟等价系统全局渐近稳定,进而 T-S 模糊控制系统全局渐近稳定.

证毕.

## 2 非线性时变被控对象的模糊控制系统稳定性

### 2.1 T-S 模糊控制系统的虚拟等价系统

控制系统的描述同 1.1,被控对象没有直接约束,可以考虑为任意的非线性时变对象,但是假定其真实模型可以被多个局部线性时不变模型所覆盖或逼近.

用如图 5 所示的系统方框图来描述这类模糊控制系统的结构特征,其中,  $\Sigma_{P(t)}$  为未知的被控对象.

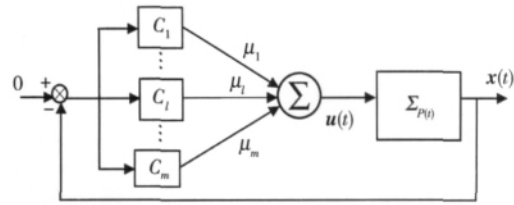


图 5 T-S 模糊控制系统的结构图

Fig.5 Structure block diagram of a T-S model based fuzzy control system

图 5 中,若模糊规则设计合理,其所考虑的局部模型集合必定包含被控对象在足够多的工作点的线性模型,而且归一化隶属度函数  $\mu_i, i \in L$  在控制系统工作的任何阶段均能正确识别相应的局部模型.在此条件下,构造图 5 所示的模糊控制系统的输入输出等价系统—虚拟等价系统如图 6 所示.图中:  $u_i(t)$  为  $C_i$  产生的输出;  $u(t)$  同图 1;  $\Delta u(t) = u(t) - u_i(t)$ ;  $x_m(t)$  为局部模型  $M_i, i \in L$  所产生的状态变量;  $e(t) = x(t) - x_m(t)$  为用多个局部线性模型  $M_i, i \in L$  逼近未知对象  $\Sigma_{P(t)}$  所产生的误差.图 6 与图 2 的本质不同在于,图 6 从结构上来说是一个线性切换系统,而图 2 是一个线性定常系统.

### 2.2 主要结果

**定理 2** 针对非线性时变未知被控对象  $\Sigma_{P(t)}$  的 T-S 模糊控制系统,若满足以下条件,则是全局渐近稳定的:

(1) 模糊规则中的局部模型能够覆盖被控对象

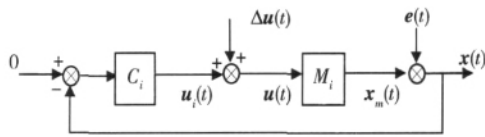


图 6 T-S 模糊控制系统的虚拟等价系统

Fig. 6 Virtual equivalent system for the T-S model based fuzzy control system

的不确定性,即被控对象的真实模型可以用  $m$  个局部模型所逼近,且逼近误差  $\|e(t)\| \rightarrow 0$ ;

(2) 归一化隶属度函数  $\mu_i, i \in L$  在控制系统工作的任何阶段均能正确识别相应的局部模型;

(3) 每个局部控制器镇定它所对应的局部模型,且局部模型之间的切换间隔足够长.

**证明** 首先将如图 6 所示系统分解为两个子系统,分别如图 7 和图 8 所示. 用数学归纳法可以证明分解前后的等价性(细节省略).

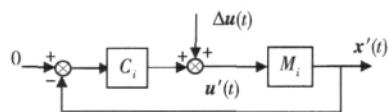


图 7 分解子系统 I

Fig. 7 Decomposed subsystem I of the virtual equivalent system

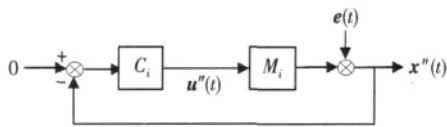


图 8 分解子系统 II

Fig. 8 Decomposed subsystem II of the virtual equivalent system

第一步,分析图 7 子系统,由定理所给条件(2)和(3)的前半部分,若假想将被控对象和相应的控制器“冻结”在某个工作点,即  $M_i$  和  $C_i$  的下标“冻结”不变,那么图 7 子系统等价于如图 2 所示系统,是一个全局渐近稳定的系统.

在此基础上,由定理条件(3)的后半部分知道,如图 7 所示系统是一个慢切换系统,且各个组成系统是稳定的线性系统,因此根据切换系统理论<sup>[14-15]</sup>可以得出结论:如图 7 所示子系统是全局渐进稳定的,即  $x'(t)$  全局渐近稳定.

第二步,再看如图 8 所示子系统,由于其为闭环稳定系统,故有

$$\|x''(t)\| = O(\|e(t)\|),$$

进一步考虑到定理条件(1),即  $\|e(t)\| \rightarrow 0$ ,有  $x''(t) \rightarrow 0$ ,进而有  $x(t) = x'(t) + x''(t) \rightarrow x'(t)$ ,即 T-S 模糊控制系统全局渐进稳定.

证毕.

### 3 结论

本文用虚拟等价系统的概念和方法分析基于 T-S 模型的模糊控制系统的稳定性,所得到的判据说明,模糊控制系统的稳定性主要取决于三个方面:第一,模糊规则的局部模型集合能够覆盖被控对象的不确定性;第二,模糊规则的归一化隶属度函数应该能够识别或辨识真实的对象模型;第三,每个局部控制器镇定相应的局部模型.

### 参考文献

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans Syst Man Cybern*, 1985, 15(1): 116
- [2] Feng G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2006, 14(5): 676
- [3] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets Syst*, 1992, 45(2): 135
- [4] Cao S G, Rees N W, Feng G. Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems. *Int J Control*, 1996, 64(6): 1069
- [5] Cao S G, Rees N W, Feng G.  $H_\infty$  control of nonlinear continuous-time systems based on dynamical fuzzy models. *Int J Syst Sci*, 1996, 27(9): 821
- [6] Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex control systems: Part II. Fuzzy controller design. *Automatica*, 1997, 33(6): 1029
- [7] Choi D J, Park P.  $H_\infty$  state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent Lyapunov functions. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2003, 11(2): 271
- [8] Guerra T M, Vermeiren L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 2004, 40(5): 823
- [9] Tanaka K, Hori T, Wang H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2003, 11(4): 582
- [10] Wang Y, Sun Z Q, Sun F C. Stability analysis and control of discrete-time fuzzy systems: a fuzzy Lyapunov function approach // *Proceeding of 5th Asian Control Conference*, Vol. 3. Melbourne, 2004: 1855
- [11] Zhou S S, Feng G, Lam J, et al. Robust  $H_\infty$  control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions. *Inf Sci*, 2005, 174(3/4): 197
- [12] Zhang W C. On the stability and convergence of self-tuning control-virtual equivalent system approach. *Int J Control*, 2010, 83(5): 879
- [13] Desoer C A, Vidyasagar M. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York: Academic Press, 1975
- [14] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst Mag*, 1999, 19(5): 59
- [15] Shorten R, Wirth F, Mason O, et al. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Rev*, 2007, 49(4): 545