

## 基于六端网络法的压电超声换能器优化设计研究

刘世杰<sup>1)</sup>, 冯平法<sup>1,2)</sup>, 查慧婷<sup>1)</sup>✉, 冯峰<sup>1)</sup>

1) 清华大学深圳国际研究生院先进制造学部, 深圳 518055 2) 清华大学机械工程系, 北京 100084

✉ 通讯作者, E-mail: zhahuiting123@sz.tsinghua.edu.cn

**摘要** 压电超声换能器传统四端网络设计方法忽略了压电陶瓷晶堆内部的机电耦合过程, 使用该方法所设计的压电超声换能器尺寸误差大, 输出的超声振幅较小。为了提高压电超声换能器尺寸设计精度、增大换能器输出的超声振幅, 本文将考虑压电陶瓷晶堆内部机电耦合作用的六端网络引入到压电超声换能器的设计中, 分别采用四端网络法和六端网络法设计得到两个不同尺寸的压电超声换能器 A 和 B, 通过有限元方法对比分析了两个换能器的固有频率和输出振幅, 并进一步通过实验验证了设计理论与仿真分析的有效性。研究结果表明, 在相同激励电压下, 采用六端网络法设计得到的压电超声换能器 B 输出的超声振幅是换能器 A 输出振幅的 1.5 倍, 六端网络法设计压电超声换能器可以提高所设计换能器的振动性能。

**关键词** 压电超声换能器; 六端网络法; 四端网络法; 有限元分析; 超声振幅

分类号 TH122

## Research on Optimized Design for Piezoelectric Ultrasonic Transducer Based on Six-terminal Network

LIU Shi-jie<sup>1)</sup>, FENG Ping-fa<sup>1,2)</sup>, ZHA Hui-ting<sup>1)</sup>✉, FENG Feng<sup>1)</sup>

1) Division of Advanced Manufacturing, Tsinghua Shenzhen International Graduate School, Shenzhen 518055, China

2) Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

✉ Corresponding author, E-mail: zhahuiting123@sz.tsinghua.edu.cn

**ABSTRACT** As an effective method for efficient precision machining of hard and brittle materials, ultrasonic assisted machining has been widely researched and applied over the past years. As a result, higher requirements are put forward for the performance of ultrasonic assisted machining equipment. Ultrasonic transducer is one of the core components of ultrasonic assisted machining system, which determines the machining performance of ultrasonic assisted machining system. Study on the design method of ultrasonic transducer is necessary for the establishment of ultrasonic assisted machining system. Four-terminal network method based on mechanic-electric analogous is an effective design method, which regards the mechanical vibration system as an electrical four-terminal network, the wave velocity of the mechanical wave in the vibration system can be equivalent to the current in the equivalent circuit, the force impedance at both ends of the vibration system can be equivalent to the electrical impedance at both ends of the equivalent circuit. The size of ultrasonic transducer can be calculated according to the electromechanical similarity theory and vibration boundary conditions. However, the conventional four-terminal network design method of piezoelectric ultrasonic transducer (PUT) neglects the electromechanical coupling process inside the stacked piezoelectric ceramics (SPCs). The PUT designed by this method has

**收稿日期:** 2020-XX-XX**基金项目:** 深圳市科技计划基础研究项目 (学科布局) (JCYJ20180508152128308);  
深圳市科技计划基础研究项目 (面上项目) (JCYJ20190813173607172).

big size error and low output amplitude. Aimed to obtain a higher ultrasonic amplitude of PUT, the equivalent six-terminal network of SPCs considering electromechanical coupling is introduced into the traditional design method and two PUTs of different sizes are designed by the four-terminal network and the six-terminal network, named transducer A and transducer B, respectively. The natural frequency and output amplitudes of the two PUTs are analyzed and compared by finite element method (FEM), and the experiments further verified the validity of the theory and the simulation analysis. When the excitation voltage is same, the results show that the output amplitude of transducer B (designed by six-terminal network) is 1.5 times higher than the amplitude of transducer A, and applying six-terminal network to the PUT designing can improve the vibration performance of PUT effectively.

**KEY WORDS** piezoelectric ultrasonic transducer; six-terminal network method; four-terminal network method; finite element analysis; ultrasonic vibration amplitude

近年来, 先进陶瓷材料、聚合物材料及其复合材料在航空航天、国防军工、电子信息、医疗器械、轨道交通等领域发挥着越来越重要的作用<sup>[1]</sup>, 尤其是具有优异的机械、电气和光学性能的硬脆材料, 如晶体硅<sup>[2]</sup>、结构陶瓷<sup>[3-4]</sup>、工程陶瓷<sup>[5]</sup>、光学玻璃<sup>[6]</sup>等。但硬脆材料具有高硬度、高强度、载荷作用下容易脆断等特点, 在使用传统加工方法进行机械加工时容易产生裂纹, 形成表面和亚表面损伤, 加工过程中刀具极易发生磨损、崩刃等现象<sup>[7、8]</sup>, 研究表明, 旋转超声加工技术能够有效提高硬脆材料的加工质量、降低切削力、改善刀具磨损, 是一种硬脆材料有效的加工方法<sup>[9-11]</sup>。

旋转超声加工系统一般由以下部分组成: 超声波发生器、无线电能传输系统、超声换能器、变幅杆和刀具。对于超声换能器和变幅杆, 常用的设计方法主要有解析法<sup>[12]</sup>、传输矩阵法<sup>[13]</sup>、四端网络法<sup>[14、15]</sup>、有限元法<sup>[16、17]</sup>等。其中四端网络法是将超声换能器和变幅杆各个直径不同的部分分别等效成一个四端网络, 根据机电相似理论和振动边界条件求取待设计尺寸。~~对于不同形式和级数的换能器和变幅杆, 只要顺序调用不同形式的四端网络, 得到总传输矩阵, 再根据边界条件求解即可, 具有方便易用的优点。~~然而, 采用四端网络法设计换能器时, 压电片通常是规则的圆柱形状, 如图 1 所示, 传统上将其等效为等截面杆四端网络, 忽略了压电片内部的机电耦合过程, 影响所设计换能器的输出振幅。

本文在四端网络设计法的基础上, 将压电超声换能器的前、后盖板及连接螺栓等效成电学四端网络, 并且将压电陶瓷晶堆等效成考虑了机电耦合的六端网络, 利用机械振动系统和电路系统的相似理论对压电超声换能器整体设计, 并进行了有限元分析和实验验证。

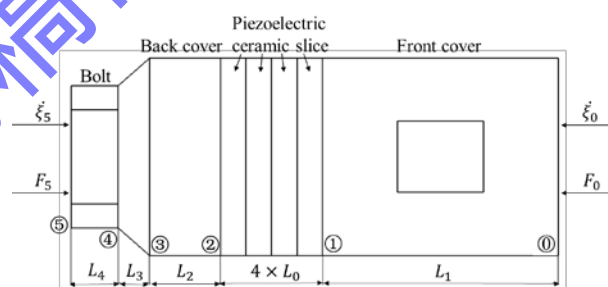


图 1 压电超声换能器结构

Fig.1 Structure of PUT

## 1 压电超声换能器等效电学网络模型

四端网络法的原理是力电类比, 将具有输入和输出的力学振动系统看作一个电学四端网络, 其中机械波在振动系统中的波速等效为电路中的电流, 振动系统两端的力阻抗等效为电路两端的电阻抗<sup>[18]</sup>。~~用这种力电类比方法得到换能器和变幅杆每一部分的等效网络, 将各等效网络按顺序串联起来, 再通过电路运算求出网络中的设计参数。图 2 为机械系统四端网络和电路四端网络类比图示。~~

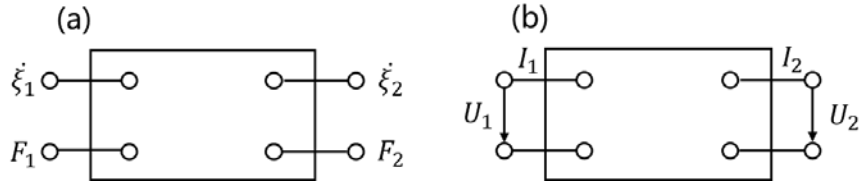


图2—机械四端网络和电路四端网络类比示意图。(a) 机械四端网络; (b) 电路四端网络

Fig.1—Comparison between the mechanical four-terminal network and electrical four-terminal network: (a) mechanical four-terminal network; (b) electrical four-terminal network

考虑一个由均匀、各向同性材料制造的单一变截面杆，如图32(a)所示，设  $\xi(x,t)$  为杆中任一质点随平衡位置的位移，该位移变量是质点轴向坐标  $x$  和时间  $t$  的函数， $S(x)$  为杆的截面积函数， $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别为  $x=0$  和  $x=l$  时杆的位移， $F_1$  和  $F_2$  分别为  $x=0$  端和  $x=l$  端杆所受外力，其中  $l$  为变截面杆的长度。

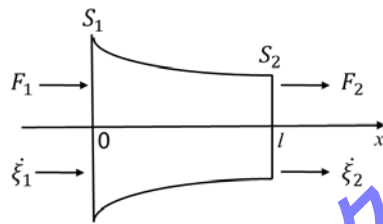


图3—单一变截面杆示意图

Fig.3—Schematic illustration of the single rod with variable cross-section

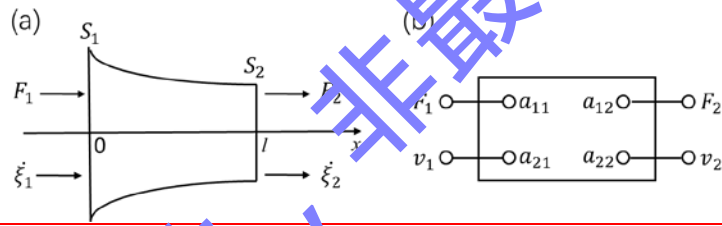


图2—单一变截面杆及其等效四端网络：(a)单一变截面杆 (b)等效四端网络

Fig.2 The single rod with variable cross-section and its equivalent four-terminal network: (a) the rod; (b) the equivalent four-terminal network;

由牛顿第二定律得到该变截面杆简谐振动，即  $v = j\omega\xi$  时，波动方程为：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + k^2 v = 0 \quad (1)$$

其中， $k = \omega/c$  为圆波数， $\omega$  为角频率， $c = \sqrt{E/\rho}$  为纵波在杆中的传播速度， $E$  为材料的弹性模量， $\rho$  为材料密度。对于截面积函数  $S(x)$  已知的变截面杆，方程(1)仅位移  $\xi(x,t)$  未知，结合变截面杆两端边界条件及应力方程，可得变截面杆两端所受的力和振动速度之间的关系式(2)：变截面杆两端边界条件可表示为：

$$\begin{cases} x=0: F_1 = -S_1 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ x=l: F_2 = -S_2 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} \end{cases} \quad (2)$$

由应力方程可知杆受力大小：

$$F = SE \cdot \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = j \frac{SE}{\omega} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

若令

$$\begin{cases} K^2 = k^2 - \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{S}}{\partial x^2} \\ v = S^{-1/2} y \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入式(2)中得:

$$\begin{cases} F_1 = j \frac{\rho c}{2k} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=0} v_1 + j \frac{\rho c S_1 K}{k \tan(Kl)} v_1 - j \frac{\rho c K \sqrt{S_1 S_2}}{k \tan(Kl)} v_2 \\ F_2 = j \frac{\rho c}{2k} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=l} v_2 - j \frac{\rho c S_2 K}{k \tan(Kl)} v_2 + j \frac{\rho c K \sqrt{S_1 S_2}}{k \tan(Kl)} v_1 \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{cases} K^2 = k^2 - \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{S}}{\partial x^2} \\ v = S^{-1/2} y \end{cases} \quad (3)$$

式(5)描述了变截面杆两端所受的力和振动速度之间的关系, 若将变截面杆  $x=0$  的一端当作输入端,  $x=l$  的一端当作输出端, 则输出端受力  $F_2$  和振速  $v_2$  可以用输入端的受力  $F_1$  和振速  $v_1$  表示成方程(4):

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

其中,

$$a_{11} = \frac{-\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=l} \sin(Kl) + K S_2 \cos(Kl)}{K \sqrt{S_1 S_2}} \quad a_{12} = j \frac{\rho c K \sqrt{S_1 S_2}}{k \sin(Kl)} + \left( j \frac{\rho c}{2k} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=l} - j \frac{\rho c S_2 K}{k \tan(Kl)} \right) a_{22}$$

$$a_{21} = \frac{K \sin(Kl)}{c \sqrt{S_1 S_2}} \quad a_{22} = \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=0} \sin(Kl) + K S_1 \cos(Kl)}{K \sqrt{S_1 S_2}}$$

即机械四端网络的等效电路图可以表示为图 42(b)的形式。

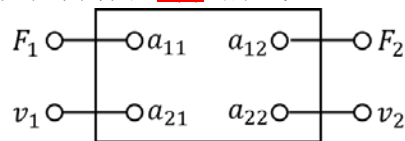


图 4—变截面杆的等效四端网络

Fig.4—Schematic illustration of the single rod with variable cross section

在压电换能器中, 压电陶瓷晶堆是由中间开孔的压电陶瓷片和电极片相互间隔粘结而成的, 设计压电超声换能器时可将压电陶瓷晶堆等效成等截面杆, 将其材料参数直接代入式(4)中得到压电陶瓷晶堆的等效四端网络<sup>[19]</sup>, 这种方法简化了设计和计算过程, 但忽略了压电陶瓷晶堆中的机电耦合, 增加了换能器的设计误差。

压电陶瓷薄圆片只有轴向 ( $z$  向) 施加了电场, 只有轴向存在应力,  $g$  型压电方程为<sup>[20, 21]</sup>:

$$\begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_D & g^T \\ -g & \beta_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} \quad (57)$$

压电方程是描述晶体的力学量（应力 $T$ ，应变 $S$ ）及电学量（电场强度 $E$ 和电位移 $D$ ）之间相互联系的表达式。式(7)中 $s_D$ 是恒电位移柔顺系数矩阵， $\beta_T$ 是恒应力介电常数矩阵， $g$ 是压电电压常数矩阵。式(7)的轴向应力 $T_{33}$ 和轴向电场强度 $E_{33}$ 为：

$$T_{33} = \frac{1}{s_{33}^D} S_{33} - \frac{g_{33}}{s_{33}^D} D_{33} \quad (8)$$

$$E_{33} = -g_{33} S_{33} + \beta_{33}^T D_{33} \quad (9)$$

根据牛顿第二定律，压电陶瓷圆片简谐振动时的波动方程为：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + k^2 \xi = 0 \quad (10)$$

其中， $k = \omega/c$ 是波数，设压电陶瓷圆片两端的位移分别为 $\xi_1$ 、 $\xi_2$ ，则压电陶瓷圆片位移波动方程的解为：

$$\xi = \frac{\xi_1 \sin(kl - kz) - \xi_2 \sin(kz)}{\sin(kl)} \quad (11)$$

其中， $k = \omega/c$ 是波数，设压电陶瓷圆片两端的位移分别为 $\xi_1$ 、 $\xi_2$ ，压电陶瓷圆片电路状态方程为

将式(8)代入(9)，并用 $V = \int_0^l E_3 dz$ 求解压电陶瓷圆片两端的电压，得到电路状态方程：

$$V = \frac{n}{j\omega C_0} v_1 + \frac{n}{j\omega C_0} v_2 + \frac{1}{C_0} I \quad (12)$$

其中， $C_0 = \frac{s}{l\beta_{33}^T}$ 为压电陶瓷圆片的一维截止电容， $n = \frac{g_{33}s}{ls_{33}^D\beta_{33}^D}$ 为机电转换系数，其中

$$\beta_{33}^T = \beta_{33}^T \left( 1 + \frac{g_{33}^2}{\beta_{33}^T s_{33}^D} \right)$$

结合压电陶瓷圆片电路状态方程，压电圆片轴向应力 $T_{33}$ 将压电陶瓷圆片波动方程的解代入式

(8)可以写成：

$$T_{33} = \frac{1}{s_{33}^D} \frac{\xi_1 \cos(kl - kz) \times (-k) - \xi_2 \cos(kz) \times k}{\sin(kl)} - \frac{g_{33}}{s_{33}^D} D_{33} \quad (13)$$

在压电陶瓷圆片两个端面处内力和外力平衡的边界条件下，压电片两端受力及电压可表示为矩阵形式压电陶瓷圆片两个端面处内力和外力平衡，因此在边界处满足：

$$F_1 + ST_{33}|_{z=0} = 0 \quad F_2 + ST_{33}|_{z=l} = 0 \quad (14)$$

将式(13)代入边界条件(14)，并用电路状态方程简化，得：

$$\begin{cases} F_1 = \frac{\rho c S}{j \tan(kl)} v_1 + \frac{\rho c S}{j \sin(kl)} v_2 + \frac{n}{j\omega C_0} I \\ F_2 = \frac{\rho c S}{j \sin(kl)} v_1 + \frac{\rho c S}{j \tan(kl)} v_2 + \frac{n}{j\omega C_0} I \end{cases} \quad (15)$$

式(12)和式(15)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho c S}{j \tan(kl)} & \frac{\rho c S}{j \sin(kl)} & \frac{n}{j \omega C_0} \\ \frac{\rho c S}{j \sin(kl)} & \frac{\rho c S}{j \tan(kl)} & \frac{n}{j \omega C_0} \\ \frac{n}{j \omega C_0} & \frac{n}{j \omega C_0} & \frac{1}{j \omega C_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I \end{bmatrix} \quad (469)$$

式(469)通过一个3×3的矩阵将4个力学量和2个电学量联系起来，基于式(469)，若将  $p$  片压电陶瓷圆片堆叠形成压电陶瓷晶堆，根据级联理论将各压电陶瓷圆片的等效电路串联，可以将压电陶瓷晶堆等效为如图3所示的六端网络<sup>[22]</sup>。从图3可以看出，压电陶瓷圆片可以等效为一个电学六端网络，变压器两端分别是力学部分和电学部分。得到压电陶瓷圆片的机电等效电路，如图5所示。

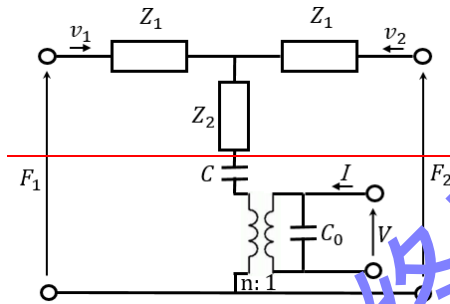


图5 压电陶瓷圆片等效电路图

Fig.5 Equivalent circuit diagram of piezoelectric ceramic slice

从图5可以看出，压电陶瓷圆片可以等效为一个电学六端网络，变压器两端分别是力学部分和电学部分，其中力学部分的电容  $C$  反映了压电陶瓷圆片内部电能和机械能的反复转换耦合过程。若将  $p$  片压电陶瓷圆片堆叠形成压电陶瓷晶堆，根据级联理论将各压电陶瓷圆片的等效电路串联，可以将压电陶瓷晶堆等效为如图6所示的六端网络<sup>[20]</sup>。

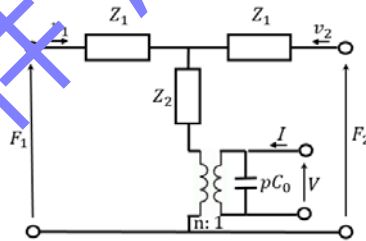


图63 压电陶瓷晶堆的等效六端网络

Fig.63 Equivalent six-terminal network of the SPC

其中：

$$\begin{cases} Z_1 = j\rho c_e S \tan(kl/2) \\ Z_2 = \frac{\rho c_e S}{j \sin(pkl)} \\ k = \omega / c_e \end{cases} \quad (4710)$$

式中， $l$ 为单片压电陶瓷片的厚度， $\rho c_e$ 为压电陶瓷片的声阻抗率， $k = \omega / c_e$ 为圆波数， $c_e = 1 / \sqrt{\rho S_{33}^E}$ 为压电陶瓷晶堆中的纵向振动等效声速，图6中  $C_0$ 为单片压电陶瓷片的静态电容量。

从式(45)中可以看出，杆件受力和振速之间的连接只涉及材料参数，因此用四端网络等效压电陶瓷晶堆时，只是将其看作等截面杆，输入参量为机械量。而式(469)由压电陶瓷圆片的压电方程、电

路状态方程和波动方程推导而来，其中机电转换系数  $n$  体现了机电转换过程，因此采用六端网络等效压电陶瓷晶堆时，将机电能量转换过程耦合到等截面杆中，输入量为电学量，更加符合压电超声换能器的工作原理。本文将六端网络运用到压电超声换能器的设计中，以提高换能器的设计的准确性。

在设计压电超声换能器时，若将压电陶瓷晶堆等效为六端网络，可以计算其输入端或者输出端的等效阻抗，填充在相应端口，将六端网络转化为可以与其它部分传输矩阵相乘的形式。通常选择结构相对简单的一端计算等效阻抗。具体而言，设压电陶瓷晶堆某一端所连杆件的等效阻抗为  $Z_b$ ，用  $Z_b$  填充压电陶瓷晶堆的六端网络中相对应的两个端口可将六端网络变为四端网络的形式，且传输矩阵  $C = (c_{11}, c_{12}; c_{21}; c_{22})$  可以根据图 63 得出，其中各元素分别为：

$$\begin{cases} c_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_b \\ c_{12} = -(Z_2 + Z_b) \\ c_{21} = Z_2 \\ c_{22} = -(Z_2 + Z_b) \end{cases} \quad (4811)$$

若压电陶瓷晶堆另一端的各段杆的传输矩阵为：

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots \quad (4912)$$

将式(4811)和(4912)相乘得到系统的总传输矩阵为：

$$D = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{bmatrix} \times \dots \times \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2013)$$

## 2 压电超声换能器设计计算

在图 1 所示压电超声换能器的设计中，预设工作频率  $f$  为 20 kHz，前后盖板的材料均为 6061 铝合金，压电陶瓷片为 PZT-8 型，沿轴向极化，连接螺栓的材料为 45 钢，各材料参数如表 1 所示。压电超声换能器的直径可根据实际需求来选择合适的尺寸，下文将以直径 50 mm 为例进行分析，需要设计计算的关键尺寸为前盖板长度  $L_1$  和后盖板圆柱段长度  $L_2$ 。

表 1 压电超声换能器各部分材料参数

Tab. 1 Material parameters of each part of the PUT

Materials	Density/(g/cm <sup>3</sup> )	Young's modulus/(N/m <sup>2</sup> )	Poisson's ratio
aluminum alloy 6061	2700	$7.07 \times 10^{10}$	0.33
PZT-8	7600	$E_x: 7.407 \times 10^{10}$ $E_y: 8.696 \times 10^{10}$ $E_z: 8.696 \times 10^{10}$	$\nu_{xy}: 0.303$ $\nu_{yz}: 0.356$ $\nu_{xz}: 0.322$
45 Steel	7850	$7.07 \times 10^{11}$	0.31

压电超声换能器的前盖板是圆柱截面杆，截面积是常数，即  $\partial S / \partial x = 0$ ，设计直径尺寸  $D_1 = 50 \text{ mm}$ ，前盖板长度  $L_1$  为待求解尺寸，将前盖板的材料参数和直径代入式(4)中，可得前盖板输入端和输出端之间的关系（以前盖板靠近节面的一端为输入端）：

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (2414)$$

其中：

$$a_{11} = \cos(k_1 L_1) \quad a_{12} = j \rho_1 c_1 S_1 \sin(k_1 L_1)$$

$$a_{21} = \frac{j \sin(k_1 L_1)}{\rho_1 c_1 S_1} \quad a_{22} = \cos(k_1 L_1)$$



$$\begin{cases} a_{11} = \cos(k_1 L_1) \\ a_{12} = j\rho_1 c_1 S_1 \sin(k_1 L_1) \\ a_{21} = \frac{j \sin(k_1 L_1)}{\rho_1 c_1 S_1} \\ a_{22} = \cos(k_1 L_1) \end{cases}$$

其中,  $F_1$  和  $v_1$  分别为图 1 中①面处的力和振速,  $\rho_1$  为铝合金的密度,  $c_1$  为铝合金中的声速,  $S_1$  为前盖板的横截面积,  $k_1$  为前盖板的波数。前盖板输入端为节面位置, 振速为 0, 输出端为自由端, 受力为 0, 将该边界条件即前盖板的边界条件为 (节面位置  $x=0$ ):

$$x=0: v_1=0 \quad x=L: F_0=0$$

代入式(214), 需满足  $a_{11}=0$ , 进而求出前盖板长度  $L_1=58.63 \text{ mm}$ 。可以发现, 计算所得前盖板长度接近 1/4 波长, 节面位于波节处, 前盖板输出端面为波腹, 这种分布方式一方面保证节面位置位移为 0, 便于换能器的安装固定, 同时有利于在输出端激发出最大的振幅, 这与超声加工过程对超声振幅的需求相符。压电超声换能器的后盖板圆柱段和连接螺栓为等截面杆, 设计方法与前盖板相同,

其传输矩阵分别为  $C$  和  $D$ 。

压电超声换能器的后盖板包括一段直径为 50 mm 的均匀截面杆和一段圆锥形截面杆, 对于均匀截面杆部分, 将后盖板与压电陶瓷晶堆相接的一端作为输出端, 其传输方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中:

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(k_1 L_1) \\ a_{12} = j\rho_1 c_1 S_1 \sin(k_1 L_1) \\ a_{21} = \frac{j \sin(k_1 L_1)}{\rho_1 c_1 S_1} \\ a_{22} = \cos(k_1 L_1) \end{cases}$$

其中  $F_2$  和  $v_2$  分别为图 1 中面②处的力和振速,  $F_3$  和  $v_3$  分别为图 1 中面③处的力和振速,  $\rho_2$  为铝合金的密度,  $c_2$  为铝合金中的声速,  $S_2$  为后盖板面②的截面积,  $k_2$  为后盖板的波数。

对于后盖板圆锥形截面杆, 以图 1 中面③为输入端, 传输方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中:

$$c_{11} = \frac{R_3 - R_4}{R_3 k_3 L_3} \sin(k_3 L_3) + \frac{R_4}{R_3} \cos(k_3 L_3)$$

$$c_{12} = j\rho_3 c_3 S_3 \left\{ \left[ \left( \frac{R_3 - R_4}{R_4 k_3 L_3} \right)^2 + \frac{R_3}{R_4} \right] \sin(k_3 L_3) - \left( \frac{R_3 - R_4}{R_4} \right)^2 \frac{\cos(k_3 L_3)}{k_3 L_3} \right\}$$

$$b_{21} = \frac{j}{\rho_4 c_4 S_4} \frac{R_3}{R_4} \sin(k_3 L_3) \quad b_{22} = -\frac{R_3 - R_4}{R_4} \frac{\sin(k_3 L_3)}{k_3 L_3} + \frac{R_3}{R_4} \cos(k_3 L_3)$$

$$c_{21} = \frac{j}{\rho_4 c_4 S_4} \frac{R_3}{R_4} \sin(k_3 L_3)$$



$$c_{22} = \frac{R_3 - R_4 \sin(k_3 L_3)}{R_4} + \frac{R_3 \cos(k_3 L_3)}{R_4}$$

其中,  $F_4$  和  $v_4$  分别为图 1 中面④处的力和振速,  $\rho_3 = \rho_4$  为铝合金的密度,  $c_3 = c_4$  为铝合金中的声速,  $S_3$  为面③的截面积,  $S_4$  为面④的截面积,  $k_3$  为后盖板的波数,  $L_3$  设计为 8 mm。

连接螺栓看作等截面杆, 以面④为输入端, 传输方程为:

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中:

$$\begin{cases} d_{11} = \cos(k_4 L_4) \\ d_{12} = j\rho_4 c_4 S_4 \sin(k_4 L_4) \\ d_{21} = \frac{j \sin(k_4 L_4)}{\rho_4 c_4 S_4} \\ d_{22} = \cos(k_4 L_4) \end{cases}$$

其中  $F_5$  和  $v_5$  分别为图 1 中面⑤处的力和振速,  $\rho_4$  为 45 钢的密度,  $c_4$  为 45 钢中的声速,  $S_4$  为后盖板面④的截面积,  $k_4$  为连接螺栓的波数, 螺栓厚度  $L_4$  为 12 mm。

对于压电陶瓷晶堆, 如果不考虑压电片中的机电耦合作用, 其等效四端网络与前盖板的等效四端网络相似, 这种方法计算得  $L_2 = 9.95$  mm。如第 1 节所述, 考虑压电片中的机电耦合作用, 压电陶瓷晶堆可等效为图 63 所示六端网络, 用后盖板和螺栓的等效阻抗填充压电陶瓷晶堆等效六端网络的两个端口, 则后盖板、螺栓和压电陶瓷晶堆整体形成一个四端网络, 后盖板和螺栓的等效阻抗可以由式(16)求出:

$$Z_b = \frac{c_2}{v_2} - \frac{m_2}{v_{22}} \quad (2516)$$

其中:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

将式 (2516) 代入式 (4810) 中得到压电陶瓷晶堆、后盖板和连接螺栓共同组成的四端网络传输方程:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_5 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad (2617)$$

根据超声加工所需输出功率大小, 选择 4 片压电陶瓷片, 每片厚度为 6.5 mm, 直径为 50 mm。式 (2617) 的传输矩阵中只含有一个未知参数  $L_2$ , 边界条件为:  $v_1 = 0$ 、 $F_5 = 0$ , 即要求  $t_{22} = 0$ , 求得  $L_2 = 15.78$  mm。经过以上设计和计算, 设计出的压电超声换能器的各部分关键尺寸如下表 2 所示:

表 2 压电超声换能器设计尺寸  
Tab.2 Designed dimensions of each part of the PUTs

Parts	Length/mm	Diameter/mm
Front cover	58.63	50
piezoelectric ceramic slice	6.5	50
Cylindrical section of back cover (four-terminal network method)	9.95	50
Cylindrical section of back cover (six-terminal network method)	15.78	50
Conic section of back cover	8	The bottom surface:50 The top surface:36
Bolt	12	36

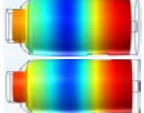
### 3 压电超声换能器有限元分析

压电超声换能器的工作原理本质上是一种电场与机械振动的耦合作用, 有限元仿真方法通过求解微分方程可以模拟真实物理过程, 同时能检验换能器的尺寸设计是否合理, 对换能器的设计优化

起到指导作用。

在第 2 节中分别采用四端网络法和六端网络法设计了两个不同尺寸的压电超声换能器，分别记作换能器 A（四端网络法）和换能器 B（六端网络法），利用有限元分析方法得到换能器最接近设计频率（20 kHz）的纵振固有频率如表 3 所示。

表 3 压电超声换能器纵振固有频率仿真分析  
Tab.3 Natural frequency of longitudinal vibration of the PUTs by FEM

	Natural frequency	Design error	Modal solution
Transducer A	20074	0.37%	
Transducer B	19270	3.65%	

可见两种换能器均能在 20 kHz 附近产生纵振模态的谐振，且误差较小，在节面位置幅值最小，可以用于换能器主体与机床的连接固定，前盖板前端输出振幅最大，可与变幅杆相连，提供足够大的幅值振幅。

瞬态分析模型设置如图 4 所示中，在图 74(a)所示平面 2 和 4 施加电压激励，电压表达式为  $V(t) = 50 \cos(2\pi \times f \times t)(V)$ ，其中频率 ( $f$ ) 取表 1 中换能器的纵振固有频率，平面 1、3 和 5 接地，在每一个激励周期内计算 10 个点，计算足够长的时间，分析换能器前盖板前端面点 1 处的输出振幅，如图 4(b)6 所示。

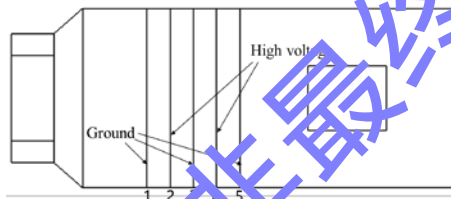


图 5 激励电压施加方式

Fig.5 The application of the excitation voltage

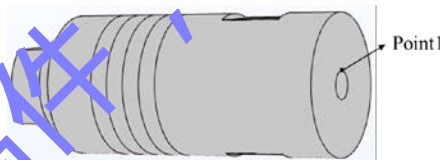


图 6 前盖板输出点 1 示意图

Fig.6 Schematic illustration of point 1

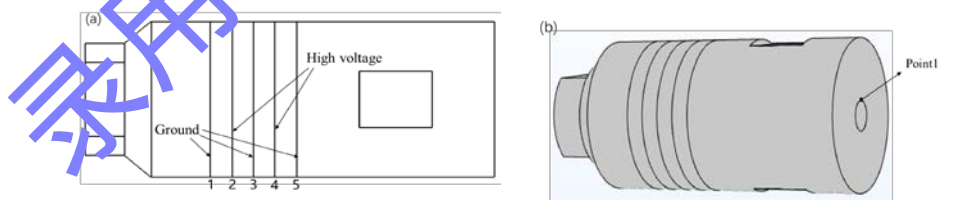


图 4 瞬态分析模型设置 (a) 激励施加方式 (b) 前盖板振动输出点 1

Fig.4 Model setup of transient analysis. (a) The application of the excitation voltage (b) Schematic illustration of point 1

图 95 为两种压电超声换能器在简谐激励下达到稳定振动状态时前盖板点 1 处的输出振动。由图 95 可知，采用六端网络法设计的换能器 B 可以输出更大的振幅，振幅平均值约为  $7 \mu\text{m}$ ，换能器 A 输出振幅平均值  $4.5 \mu\text{m}$ 。换能器 A 设计过程中将压电陶瓷晶堆当作无源器件，忽略了机电耦合过程对压电陶瓷晶堆中机械波传播的影响，导致机械波到达后盖板自由端面与空气交界面时并不处于波腹位置，机械波经过后盖板反射之后在换能器内形成驻波，反射波与原生波振动幅值不同导致两者重合度低，不利于换能器整体的谐振，输出振幅较小<sup>[23]</sup>。

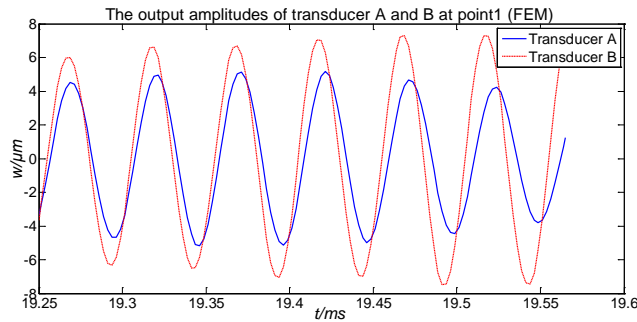


图 75 换能器 A 和 B 端面点 1 处的输出振幅仿真结果

Fig.75 Amplitudes of transducer A and B at point 1 by FEM

#### 4 压电超声换能器振动实验测试

根据第 2 节中设计的压电超声换能器的尺寸，制作了图 406 所示的两个换能器，两者前盖板长度均为 60 mm，换能器 A 后盖板圆柱段长度为 10 mm，总长为 116 mm，换能器 B 后盖板圆柱段长度为 16 mm，总长为 122 mm。图 411 为使用阻抗分析仪测试换能器的固有频率，得到换能器 A 和 B 的固有频率分别为 19860 Hz 和 19474 Hz，与第 3 节中仿真计算结果之间的误差小于 1%。



图 406 压电超声换能器

Fig.406 Designed PUTs

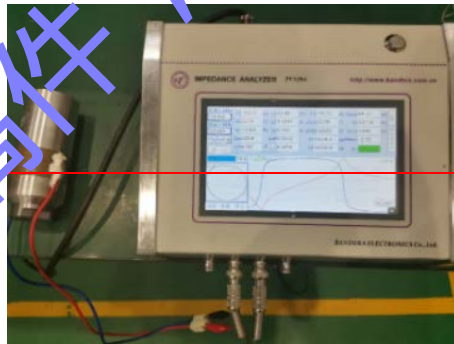


图 411 压电超声换能器固有频率测量

Fig.11—Experimental setup for measuring of the natural frequency of the PUT

图 407 为给压电片施加 50 V 激励电压，调整电源输出信号频率，使得换能器输出振幅最大，使用激光位移传感器测量换能器稳定工作时前盖板输出位移，换能器 A 前盖板端面上输出振幅约为 3.4  $\mu\text{m}$ ，工作频率为 20350 Hz，换能器 B 前盖板端面上输出振幅约为 5  $\mu\text{m}$ ，工作频率为 19680 Hz，采用六端网络法设计的换能器在相同激励作用下可以输出更大振幅，如图 418 所示。换能器最佳工作频率大于有限元分析和阻抗分析仪所测谐振频率的原因在于装配过程中连接螺栓的预紧力会导致换能器谐振频率的增加<sup>[24、25]</sup>。换能器在实际使用过程中，会在前盖板前端加装用于放大振幅的变幅杆，对于简单阶梯型、圆锥形、指数型变幅杆，通常其振幅放大系数  $M \geq 2$ ，因此这种换能器用于超声加工时可以保证刀尖处输出振幅大于 10  $\mu\text{m}$  的超声振动，能够满足旋转超声加工的需求。

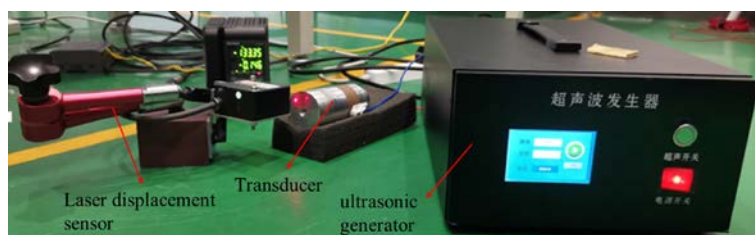


图 127 压电超声换能器输出位移测试

Fig.127 Experimental setup for measuring of the displacement of the PUTs

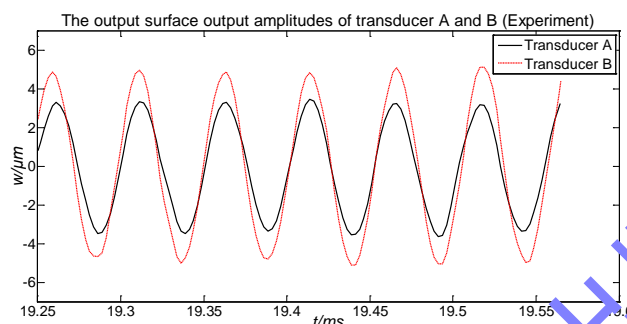


图 118 换能器 A 和 B 端面输出振幅实验结果

Fig.118 Experimental results of the output amplitudes of transducer A and B

## 5 结论

本文将考虑压电陶瓷晶堆中机电耦合作用的六端网络引入到压电超声换能器的设计中，并分别采用考虑机电耦合作用的电学六端网络法和不考虑机电耦合作用的传统四端网络法设计了两个不同尺寸的压电超声换能器。有限元分析和实验结果表明，相比于传统的四端网络，将压电陶瓷晶堆等效为考虑机电耦合作用的六端网络更适用于超声压电换能器的设计。在相同激励条件下，根据六端网络法设计得到的换能器可以输出更大的振幅。

## 参考文献

- [1] Albert J S, Berend D, Thibault G, David Curry, et al. Fixed abrasive machining of non-metallic materials. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2015, 5: 767
- [2] Wu H. Wire sawing technology: A state-of-the-art review. *Precision Engineering-journal of The International Societies for Precision Engineering and Nanotechnology*, 2016, 43: 1
- [3] Ohmori H, Ebizuka N, Morita S, et al. Ultraprecision micro-grinding of germanium immersion grating element for mid-infrared super dispersion spectrograph. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 2001, 50(1): 221
- [4] Zhang Y. *Study on the Preparation and Properties of CoTiNb2O8-based Microwave Dielectric Ceramics* [Dissertation]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2017  
(张云. 铌酸钛钴基微波介质陶瓷的制备与性能研究[学位论文]. 北京: 北京科技大学, 2017)
- [5] Brinksmeier E, Mutlugunes Y, Klocke F, et al. Ultra-precision grinding. *Cirp Annals - Manufacturing Technology*, 2010, 59(2): 652
- [6] Zhou M, Wang X J, Ngoi B K, et al. Brittle-ductile transition in the diamond cutting of glasses with the aid of ultrasonic vibration. *Journal of Materials Processing Technology*, 2002, 121(2): 243
- [7] Thoe T B, Aspinwall D K, Wise M L, et al. Review on ultrasonic machining. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 1998, 38(4): 239
- [8] Mohd Rasidi Lbrahim, Zulafif Rahim, et al. An experimental investigation of cutting temperature and tool wear in 2 dimensional ultrasonic vibrations assisted micro-milling. *MATEC Web of Conferences*, 2017, 95: 2

- [9] Feng P F, Wang J J, Zhang J F, et al. Research status and future prospects of rotary ultrasonic machining of hard and brittle materials. *J Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(19): 3  
(冯平法,王健健,张建富,等. 硬脆材料旋转超声加工技术的研究现状及展望. 机械工程学报, 2017, 53(19): 3)
- [10] Zhang C L, Feng P F, Zhang J F. Surface properties of optical glass processed with rotary ultrasonic face milling. *J Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2012, 52(11): 1616  
(张承龙,冯平法,张建富. 光学玻璃旋转超声端面铣削表面特性. 清华大学学报(自然科学版), 2012, 52(11): 1616)
- [11] Zhou M, Wang M, Dong G J. Experimental Investigation on Rotary Ultrasonic Face Grinding of SiCp/Al Composites. *Materials and Manufacturing Processes*, 2016, 31(5): 673
- [12] He X P, Gao J. A review of ultrasonic solid horn design. *J Technical Acoustics*, 2006(01): 82  
(贺西平,高洁. 超声变幅杆设计方法研究. 声学技术, 2006 (01): 82)
- [13] Lesniewski P J. Discrete component equivalent circuit for Webster's horns. *Applied Acoustics*, 1995, 44: 117
- [14] Gao J, He X P, Hu J. Unified treatment of ultrasonic horn characteristics based on four-end network approach. *J Technical Acoustics*, 2006(01): 87  
(高洁,贺西平,胡静. 四端网络法统一变幅杆的性能参量. 声学技术, 2006(01): 87)
- [15] Shan X B, Xie T. Wire drawing with orthogonal composite ultrasonic vibration. *J Chinese Journal of Engineering*, 2010, 32(01): 89  
(单小彪,谢涛. 正交复合超声振动拉丝. 工程科学学报, 2010, 32(01): 89)
- [16] Huang Y, Ding G, Chen B, et al. Simulation and experiment of langvint-type piezoelectric ultrasonic horn for micro tool motion. *Intelligent Technologies and Engineering Systems*. 2013, 254: 067
- [17] Ping Guo, Kornel F. Ehmann. Development of a New Vibrator for Elliptical Vibration Texturing. *ASME 2011 International Manufacturing Science and Engineering Conference*, 2011: 13
- [18] Zhao F L, Feng D J, Guo D M, et al. Design of horn using four-end network method. *J Acta Acustica*, 2002(06): 554  
(赵福令,冯冬菊,郭东明,等. 超声变幅杆的四端网络法设计. 声学学报, 2002(06): 554)
- [19] Huang D Z. Design of vibration system for ultrasonic wave vibrator. *J Journal of Vibration and Shock*, 2005(05): 110  
(黄德中. 超声波振动器四端网络设计. 振动与冲击, 2005(05): 110)
- [20] Jiao F Y. Study on elastic waves propagation in piezoelectric and piezoelectric semiconductor layer structures[Dissertation]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2019  
(焦凤瑀. 压电和压电半导体层状结构中弹性波传播研究[学位论文]. 北京: 北京科技大学, 2019)
- [21] Lin S Y. *Theory and design of Ultrasonic Transducer*. Beijing: Science Press, 2004  
(林书玉. 超声换能器的原理及设计. 北京: 科学出版社, 2004)
- [22] Martin G E. Vibrations of coaxially segmented, longitudinally polarized ferroelectric tubes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36(8): 1496
- [23] Zuo W K, Zhou W G, Wei M Y, et al. Formation and Mechanism Analysis of Half-wave Loss. *Physics Bulletin*, 2019, 01: 33  
(左武魁,周维公,魏民云,等. 半波损失的形成和机理分析. 物理通报, 2019, 01: 33)
- [24] He L P, Ren X M. Study on Finite Element Modeling Method of Bolted Joints. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2020, 40(12): 1275  
(贺李平,任雪梅. 螺栓联接的有限元建模方法研究. 北京理工大学学报, 2020, 40(12): 1275)
- [25] Qiao J P. Study on the influencing factors of frequency of transducer vibrator[Dissertation]. Changsha: Central South University, 2011  
(乔家平. 换能器振子频率的影响因素研究[学位论文]. 长沙: 中南大学, 2011)