

基于模型预测的膝关节置换手术机器人柔顺控制

胡 飘¹⁾, 张 丽¹⁾✉, 杨 阔²⁾, 杨 妍³⁾

1) 中国矿业大学(北京) 人工智能学院, 北京 100083

2) 中国科学院自动化研究所多模态人工智能系统全国重点实验室, 北京 100190

3) 北京科技大学 智能科学与技术学院, 北京 100083

✉ 通信作者 张丽, E-mail: zli@cumtb.edu.cn

摘 要 针对半主动型膝关节置换手术机器人的柔顺跟随医生意图运动和手术安全范围约束问题, 提出了一种模型预测导纳控制算法。首先, 为了提高算法运行效率, 使用斯特林插值方法对机械臂动力学模型进行线性化, 并作为预测模型, 该方法计算简单且求解精度高; 其次, 基于导纳模型力柔顺控制机理识别操作医生的力意图生成机械臂期望运动轨迹; 然后, 设计虚拟状态, 提高模型预测控制算法的显式处理约束能力, 利用模型预测控制的滚动优化和反馈校正特性提高控制鲁棒性; 最后, 结合机械臂模型预测导纳控制器。设计三环 PID 控制对照试验, 验证了模型预测控制算法的轨迹跟踪性能更好, 可以更好的实现期望的导纳动态, 从而得到更优的柔顺效果。在此基础上, 进一步验证模型预测导纳控制器在具有强耦合性、复杂系统参数结构特性的机械臂上的主动约束效果。结果表明模型预测导纳控制算法能实现比传统三环 PID 控制更好的柔顺性, 且具备满足膝关节置换手术需求的安全性。本文有望促进半主动手术机器人的实际应用。

关键词 手术机器人; 人机交互; 模型预测; 导纳控制; 安全约束

分类号 TP242.3

Model Predictive-Based Compliance Control for Knee Arthroplasty

Surgical Robots

HU Piao¹⁾, ZHANG Li¹⁾✉, YANG Hong-jun²⁾, YANG Yan³⁾

1) School of artificial intelligence, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China

2) State Key Laboratory of Multimodal Artificial Intelligence Systems, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

3) School of Intelligence Science and Technology, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

✉ Corresponding author, Zhang Li, E-mail: zli@cumtb.edu.cn

ABSTRACT In response to the compliant tracking of surgical intent and adherence to safety range constraints in semi-active knee arthroplasty robots, a Model Predictive Impedance Control (MPIC) algorithm is proposed. Firstly, to enhance the algorithm's operational efficiency, the Stirling interpolation method is employed to linearize the dynamics model of the robotic arm as the predictive model. This method offers simplicity in computation and high precision in solving accuracy. Secondly, based on the impedance model, the force-compliant control mechanism is utilized to identify the surgeon's force intention, thereby generating the desired motion trajectory for the robotic arm. For ease of programming implementation, the impedance model is discretized. Next, leveraging the rolling optimization and feedback correction properties of model predictive control, a virtual state enhancement is designed to improve the explicit constraint handling capability of the MPIC algorithm. This

基金项目: 北京市自然科学基金-海淀原始创新联合基金资助(L212034); 国家自然科学基金资助项目(62103039)

addresses the infeasibility issues encountered by traditional model predictive control near state constraint boundaries in practical applications. By transforming the model predictive problem into a quadratic programming problem, the difficulty of solving the model predictive problem is reduced, and the speed of solving the problem is increased. Finally, the MPIC is integrated as the lower-level position tracking controller for the robotic arm, with the impedance model serving as the upper-level task planning controller, thus forming the MPIC controller. Comparative experiments with three-loop PID control are conducted on the ROKAE seven-axis collaborative robot experimental platform, confirming that the MPIC algorithm achieves better trajectory tracking accuracy and response speed, effectively realizing the desired impedance dynamics and yielding superior compliance. Additionally, by installing a six-axis force sensor between the end effector and the wrist of the robotic arm to measure human-robot interaction forces, further validation is conducted, confirming that the MPIC algorithm exhibits better compliance compared to traditional position tracking control methods. Drag experiments are designed to verify the active constraint effect of the MPIC on mechanically coupled robotic arms with complex system parameter structures, demonstrating that the control algorithm can actively constrain the motion of the robotic arm when it is manually manipulated to exceed the set state constraint range. Overall, the Model Predictive Impedance Control algorithm achieves better compliance and meets the safety requirements for knee arthroplasty surgery compared to traditional three-loop PID control methods. This advancement holds promise for further development and adoption of semi-active surgical robots, reducing the complexity of using surgical robots for surgeons and accelerating the widespread adoption of domestically produced surgical robots in hospitals. This paper is expected to promote the practical application of semi-active surgical robots.

KEY WORDS Surgical Robot; Human-Robot Interaction; Model Predictive Control; Admittance Control; Safety Constraints

膝关节置换手术作为一种广泛应用于治疗膝关节退化性疾病的外科干预方式,近年来得到了广泛的关注。据世界卫生组织的统计数据,全球范围内每年有数百万例膝关节置换手术,而这一数字正以每年约5%的速度增长。在中国,2019年关节置换手术数量已经超过95万例,并且还在快速增加,2017至2019年年均增长率为19.96%^[1]。这一增长趋势在一定程度上可以归因于人口老龄化,以及生活方式和肥胖等因素的影响。膝关节置换手术可以帮助缓解患者疼痛、恢复生活质量。该手术的关键步骤包括股骨和胫骨的截骨,接着在这两者上安装人工关节组件,以替代受损的天然关节。传统的全膝关节置换手术中,使用手术导板来引导截骨操作,然而导板的放置位置和角度完全依赖于医生的主观经验,缺乏客观的标准,这导致了手术失败率较高^[2]。此外,导板的设计并未充分考虑膝关节表面软骨的厚度,从而引入了误差。在这种情况下,膝关节置换手术机器人技术应运而生,为手术提供了更高的精确性和安全性。

当前的膝关节置换手术机器人控制方法主要包括被动控制、主动控制和半主动控制^[3]。被动控制机器人完全不干扰医生的操作只是辅助医生定位,对于切割形状复杂的手术任务无法胜任。主动控制方法使用预先计划的轨迹进行操作。世界上首个骨科机器人辅助导航系统 Robodoc^[4]就是主动型手术机器人,该系统根据患者术前CT进行手术规划,术中参照固定于手术区域的定位器按照规划的轨迹自动完成磨削操作。然而,主动控制无法充分适应手术中患者的生理变化和外部环境的不确定性。

因此现在得到了广泛应用的膝关节置换手术机器人大多都是半主动控制,由机器人和医生共同操作,协同运动完成手术操作。半主动控制的手术机器人系统最重要的一个特性就是人机协作下的柔顺性^[5]。一些研究使用主动被动相结合的方式达到柔顺的效果^[6-7],但是这样会降低机械臂的定位精度。许多手术机器人,包括美国的MAKO^[8]系统、中国的鸿鹄关节置换手术机器人^[9]以及HURWA关节置换手术机器人系统等半主动控制型手术机器人,选用导纳控制策略,即主动柔顺的方式来实现人机协作。研究者为了提高系统的稳定性和优化人机交互体验,对传统导纳控制策略进行了改进,如Seul Jung等^[10]将神经网络应用于阻抗控制拟合机器人系统的不确定性以提高系统的稳定性。Duchaine和Gosselin^[11]开发了一种用于人机交互的可变阻抗控制器。陈书清等^[12]提出一

种自适应导纳控制，改善了导纳控制的稳定性和机器人运动的柔顺性。Hsieh^[13]提出了一种在操作者做精细操作时，调大机器人阻尼，而在做大范围快速运动时，降低机器人阻尼的变导纳方法。Yang 等^[14]提出了一种阻抗学习控制方法提高人机交互的性能。Xu 等^[15]通过分解导纳控制器输入力实现轨迹跟踪任务和柔顺性任务的解耦解决轨迹跟踪精度和柔顺性的冲突问题，Jiao 等^[16]则通过将控制策略分层为粗运动和精细运动来解决这一问题。也有一些研究结合强化学习改进导纳控制性能^[17]。但是这些研究集中在机器人运动的上层控制器的研究，忽略了底层位置跟踪器对导纳特性实现的影响。底层的位置控制器常用的控制法是三环 PID (proportional integral derivative) 控制^[18]，由于闭环系统的时滞效应，位置跟踪会有较大的延迟^[19]。而且若要更好的实现期望的导纳特性，除了位置的精确跟踪，也要考虑速度跟踪。

为了满足上述手术机器人底层控制器同时跟踪位置和速度以及减小跟踪延迟的需求，以及对半主动控制型手术机器人的柔顺性、安全性要求，本文使用模型预测控制^[20-21]作为底层位置和速度跟踪器，导纳控制作为上层控制实现人机协作的柔顺性。模型预测控制具有滚动优化和反馈校正的特征，因此可以有效降低时滞效应，且方便的处理多输入多输出系统复杂的约束条件，满足安全性要求。通过设计优化目标函数，同时实现位置和速度的跟踪^[22-24]。

本文通过上层导纳控制器产生能满足柔顺性需求的期望轨迹。设计模型预测控制器优化目标函数，使机械臂同时跟踪期望轨迹的位置和速度，并满足安全运动范围约束。为了能真正应用到实际中，本文对模型预测控制器中使用的非线性机械臂动力学模型进行了斯特林插值线性化，提高模型预测控制器求解效率。最后在珞石机械臂平台上验证了本文设计的控制策略的有效性。

1 整体控制框架设计

控制器由底层实现轨迹跟踪的模型预测控制和上层解析人手运动意图的导纳控制组成。图 1 为控制器结构图。

人与机械臂交互力传入导纳控制器生成期望的机械臂末端笛卡尔空间轨迹，经过机器人逆运动学计算后转换为关节空间轨迹，最后由模型预测控制器控制机械臂跟踪轨迹并保持在安全约束范围内。

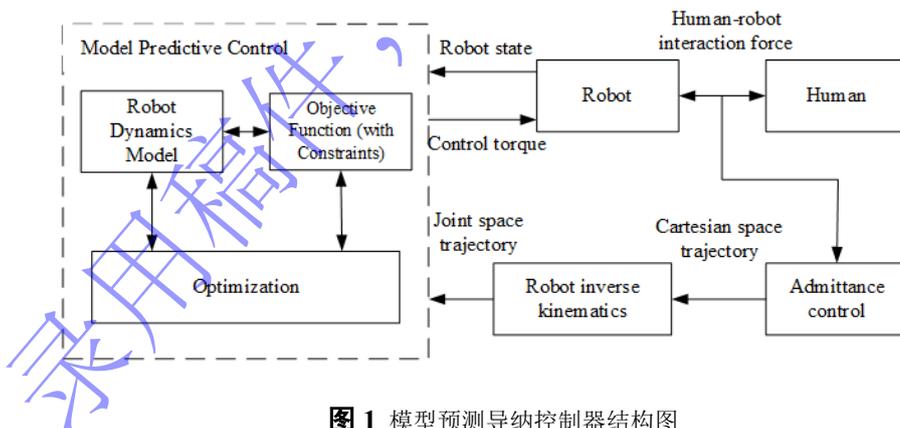


图 1 模型预测导纳控制器结构图

Fig.1 Structure diagram of composite admittance model predictive controller

2 模型预测导纳控制算法设计

2.1 机械臂非线性动力学模型建立和线性化

首先，利用拉格朗日方程建立机械臂的动力学模型^[25]，简化后可以推导出机械臂的欧拉-拉格朗日动力学方程为

$$D(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + F_f(\dot{\theta}) = \mathbf{Tau} + \mathbf{Tau}_e \quad (1)$$

其中, $\theta \in \mathbb{R}^n$, 为关节角度, $\dot{\theta}$ 为关节角速度, $\ddot{\theta}$ 为关节角加速度, $D(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为机械臂的惯性矩阵, $V(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^n$ 为离心力和哥氏力, $G(\theta) \in \mathbb{R}^n$ 为重力项, $F_f(\dot{\theta}) \in \mathbb{R}^n$ 为粘滞摩擦力矩, $Tau \in \mathbb{R}^n$ 为控制力矩, $Tau_e \in \mathbb{R}^n$ 为机械臂与环境的交互力。

显然, 动力学模型式(1)是一个时变、强非线性模型, 如果直接作为模型预测控制器的内部模型, 在控制器迭代过程中需要进行非线性优化计算, 需要消耗大量时间, 难以满足实际机械臂控制的实时性要求。所以需要将非线性模型进行线性化, 简化优化问题的求解, 提高求解速度。传统的线性化方法是泰勒级数展开法, 但是式(1)中 θ 的维数较高, 求解导数比较困难。所以本文采用斯特林插值公式对式(1)进行线性化处理。文献^[26]指出这种方法的处理精度要高于泰勒一阶近似, 且不需要进行求导运算。

定义机械臂状态变量为 $\xi = [\theta, \dot{\theta}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, 控制向量为 $\tau = Tau$, 输出向量为 P , 由式(1)可得机械臂系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Phi(\xi, \tau) \\ P = g(\xi) \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\Phi(\xi, \tau) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ D^{-1}(\theta)(Tau + Tau_e - V(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} - G(\theta) - F_f(\dot{\theta})) \end{bmatrix}, \quad g(\xi) = J\xi, \quad J \text{ 为雅可比矩阵。}$$

离散式(2), 可得

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \xi(k) + \Delta T \cdot \Phi(\xi(k), \tau(k)) = \psi(\xi(k), \tau(k)) \\ P(k) = g(\xi(k)) \end{cases} \quad (3)$$

将 $\psi(\xi(k), \tau(k))$ 和 $g(\xi(k))$ 使用斯特林插值公式在工作点 ξ 处进行线性近似得到

$$\begin{aligned} \xi(k+1) = \psi(\xi(k), \tau(k)) &\approx \frac{1}{k_s} (\mu_1 \delta_1 (\xi_1(k) - \xi_1(0)) + \dots + \mu_{2n} \delta_{2n} (\xi_{2n}(k) - \xi_{2n}(0))) \\ &+ \mu_{2n+1} \delta_{2n+1} (\tau_1(k) - \tau_1(0)) + \dots + \mu_{3n} \delta_{3n} (\tau_n(k) - \tau_n(0)) \psi(\xi(0), \tau(0)) + \psi(\xi(0), \tau(0)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$P(k) = g(\xi(k)) \approx \frac{1}{k_s} (\mu_1 \delta_1 (\xi_1(k) - \xi_1(0)) + \dots + \mu_{2n} \delta_{2n} (\xi_{2n}(k) - \xi_{2n}(0))) g(\xi(0)) + g(\xi(0)) \quad (5)$$

其中 δ_i 差分算子和 μ_i 平均算子通过以下公式计算得到

$$\begin{aligned} \delta_i \psi(\bar{\xi}) &= \psi(\bar{\xi} + \frac{k_s}{2} e_i) - \psi(\bar{\xi} - \frac{k_s}{2} e_i) \\ \mu_i \psi(\bar{\xi}) &= \frac{\psi(\bar{\xi} + \frac{k_s}{2} e_i) + \psi(\bar{\xi} - \frac{k_s}{2} e_i)}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

对于式(4) $\bar{\xi} = [\xi(0), \tau(0)]^T$, 对于式(5) $\bar{\xi} = \xi(0)$ 。 k_s 为区间 (0,1) 内的实数, 可以调节。 e_i 为第 i 个元素为 1 的单位向量。定义

$$A_1(k) = \text{diag}(\frac{\mu_1 \delta_1 \psi(\xi(0), \tau(0))}{k_s}, \dots, \frac{\mu_{2n} \delta_{2n} \psi(\xi(0), \tau(0))}{k_s})$$

$$B_1(k) = \text{diag}(\frac{\mu_{2n+1} \delta_{2n+1} \psi(\xi(0), \tau(0))}{k_s}, \dots, \frac{\mu_{3n} \delta_{3n} \psi(\xi(0), \tau(0))}{k_s})$$

$$C_1(k) = \text{diag}(\frac{\mu_1 \delta_1 g(\xi(0))}{k_s}, \dots, \frac{\mu_{2n} \delta_{2n} g(\xi(0))}{k_s})$$

则式(4)(5)重构为

$$\begin{cases} \xi(k+1) = A_l(k)\xi(k) + B_l(k)\tau(k) + \omega(k) \\ \omega(k) = \psi(\xi_0, \tau_0) - A_l(k)\xi_0 - B_l(k)\tau_0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} P(k) = C_l(k)\xi(k) + \omega_o(k) \\ \omega_o(k) = g(\xi_0) - C_l(k)\xi_0 \end{cases} \quad (8)$$

式(7)(8)式组成模型预测控制器中需要的机械臂动力学模型。

2.2 期望轨迹生成

在医生和机械臂的交互力信息中包含着操作者的运动意图，为了跟踪这个运动意图考虑到物体运动过程中力和速度所具有的导纳特性，通过合理设计导纳参数将交互力转化为机械臂的期望运动轨迹。

假设期望的人机接触^[27]阻抗动态为

$$F_{ext} = M_d(\ddot{P}_d - \ddot{P}) + D_d(\dot{P}_d - \dot{P}) + K_d(P_d - P) \quad (9)$$

其中 P_d ， \dot{P}_d 和 \ddot{P}_d 分别为机械臂末端期望位置，期望速度和期望加速度。 M_d ， D_d 和 K_d 分别为期望惯性矩阵，期望阻尼矩阵和期望刚度矩阵，都是对角和正定矩阵且每个元素值相等。

对式(9)进行拉普拉斯变换得到具有导纳特性系统的传递函数

$$\frac{\dot{P}(s)}{F_{ext}(s)} = \frac{1}{M_d s + D_d + K_d \frac{1}{s}} \quad (10)$$

将该系统函数进行采样周期为 ΔT 的离散化得到

$$\frac{\dot{P}(z)}{F_{ext}(z)} = \frac{\Delta T - \Delta T z^{-1}}{(M_d + D_d \Delta T + K_d \Delta T^2) + (-2M_d + D_d \Delta T)z^{-1} + M_d z^{-2}} \quad (11)$$

将机械臂测得的当前末端外力 $F_{ext}(k)$ 、缓存的上一时刻外力 $F_{ext}(k-1)$ 和上上时刻外力 $F_{ext}(k-2)$

输入该系统得到能体现期望导纳特性的期望速度 \dot{P}_d ，对期望速度积分得到期望末端位置 P_d ，使用机械臂的逆运动学^[28]解算出关节位置 θ 和关节速度 $\dot{\theta}$ 组成底层模型预测控制器的期望轨迹的状态值 $\xi_d = [\theta, \dot{\theta}]^T$ 。

2.3 模型预测控制器设计

使用模型预测控制跟踪 2.2 节生成的期望状态 ξ_d 。模型预测控制器原理如图 2 所示。

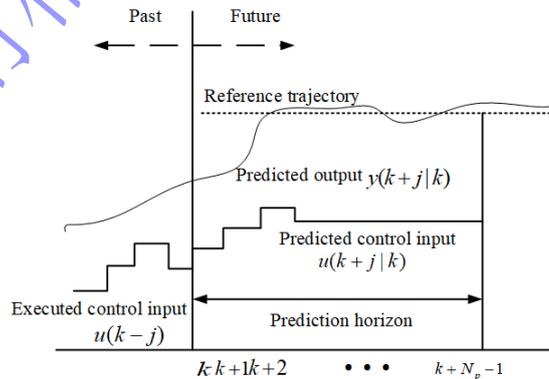


图 2 模型预测控制原理

Fig.2 Principles of Model Predictive Control

定义如下向量

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_d(k) &= [\xi_d(k|k) \ \cdots \ \xi_d(k+N-1|k)]^T \\
\bar{\tau}(k) &= [\tau(k|k) \ \cdots \ \tau(k+N-1|k)]^T \\
\bar{\xi}(k) &= [\xi(k|k) \ \cdots \ \xi(k+N-1|k)]^T \\
\bar{P}(k) &= [P(k|k) \ \cdots \ P(k+N-1|k)]^T
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $(k+j|k)$ 表示在 k 时刻对 $k+j$ 时刻的预测结果。 $\bar{\xi}_d(k)$ 为从 k 时刻开始整个预测时域的期望状态 ξ_d 组成的向量， $\bar{\tau}(k)$ 为预测时域内的预测控制量组成的向量， $\bar{P}(k)$ 为预测时域内的预测输出组成的向量， $\bar{\xi}(k)$ 为预测时域内的预测机械臂状态组成的向量， N 为模型预测的预测时域。

要使系统的预测输出与期望状态的偏差最小，考虑如下最优化问题

$$\min_{\tau(k)} W_{\xi} \|\bar{\xi}(k) - \bar{\xi}_d(k)\|^2 + W_{\tau} \|\bar{\tau}(k)\|^2 \tag{13}$$

满足约束

$$\begin{aligned}
\xi(k+j+1|k) &= A_j(k)\xi(k+j|k) + B_j(k)\tau(k+j|k) + \omega(k) \\
P(k+j|k) &= C_j(k)\xi(k+j|k) + \omega_o(k) \\
\xi(k+j+1|k) &\in \mathbb{Z} \\
\tau(k+j|k) &\in \mathbb{C} \\
\Delta \tau(k+j|k) &\in \mathbb{Q} \\
P(k+j|k) &\in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $j=0,1,\dots,N-1$ ，系统的状态、输入、输入增量和输出约束分别为 \mathbb{Z} 、 \mathbb{C} 、 \mathbb{Q} 、 \mathbb{N} 。 $W_{\xi} \in \mathbb{R}^{4N_p \times 4N_p}$ 和 $W_{\tau} \in \mathbb{R}^{2N_p \times 2N_p}$ 为适当选取的状态误差加权矩阵和输入力矩加权矩阵，它们都是对角矩阵。理论上求解式(13)(14)得到最优力矩向量 $\bar{\tau}(k)$ ，将其预测的下一时刻控制力矩 $\tau(k+1|k)$ 输入机械臂关节电机，即可实现机械臂的轨迹跟踪。

但是在实际应用时发现控制器运行不够稳定。分析后得出造成不稳定的原因有两个：一是为了节省计算资源所选取的预测时域较短，导致系统收敛到期望轨迹过慢；二是当期望轨迹状态超出设定的状态约束 \mathbb{Z} 时，在跟踪期望状态时机械臂实际状态 $\xi(k|k)$ 可能超出状态约束或者出现约束冲突，导致式(13)(14)无解^[29]。要解决第一个问题，可以通过添加合适的终端加权提高系统的稳定性。要解决这第二个问题，则需引入一个额外的虚拟状态 ξ_v ，让机械臂跟踪该虚拟状态，再由该虚拟状态跟踪期望轨迹状态^[30]，通过保证 ξ_v 满足约束条件，来实现优化问题有解。

定义 $\bar{\xi}_v(k) = [\xi_v(k|k) \ \cdots \ \xi_v(k+N-1|k)]^T$ ，则考虑的优化问题变为

$$\min_{u(k)} Y \tag{15}$$

约束条件变为

$$\begin{aligned}
\xi(k+j+1|k) &= A_j(k)\xi(k+j|k) + B_j(k)\tau(k+j|k) + \omega(k) \\
P(k+j|k) &= C_j(k)\xi(k+j|k) + \omega_o(k) \\
\xi_v(k+j+1|k) &\in \mathbb{Z} \\
\tau(k+j|k) &\in \mathbb{C} \\
\Delta \tau(k+j|k) &\in \mathbb{Q} \\
P(k+j|k) &\in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$Y = W_{\xi} \|\bar{\xi}(k) - \bar{\xi}_d(k)\|^2 + W_{\xi} \|\bar{\xi}(k+N) - \bar{\xi}_d(k+N)\|^2 + W_{\xi} \|\bar{\xi}_v(k) - \bar{\xi}_d(k)\|^2 + W_{\xi} \|\bar{\xi}_v(k+N) - \bar{\xi}_d(k+N)\|^2 + W_{\tau} \|\bar{\tau}(k)\|^2$$

式中 $W_{\tilde{x}_p}$, $W_{\tilde{x}_r}$, W_{v_p} , W_{v_r} 分别为预测转状态与虚拟状态误差加权矩阵, 预测转状态与虚拟状态误差的终端加权矩阵, 虚拟状态和期望状态的误差加权矩阵, 虚拟状态和期望状态误差的终端加权矩阵。

为了更高效方便的求解该优化问题, 将指标函数和等式不等式约束重构为一个二次规划(QP)问题^[31]

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\varphi} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{d} \leq \mathbf{S} \boldsymbol{\varphi} \leq \mathbf{u} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 为重构的状态变量

$$\boldsymbol{\varphi} = [\bar{\xi}(k) \quad \bar{\tau}(k) \quad \bar{\xi}_v(k) \quad \bar{\mathbf{P}}(k)]^T \quad (18)$$

优化指标函数的海森矩阵为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} W_{\tilde{x}_p} & \cdots & 0 & & & -W_{\tilde{x}_p} & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & W_{\tilde{x}_r} & & & 0 & \cdots & -W_{\tilde{x}_r} & & & \\ \hline & & & W_{\tau} & \cdots & 0 & & & & & \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots & & & 0 & & 0 \\ & & & 0 & \cdots & W_{\tau} & & & & & \\ \hline -W_{\tilde{x}_p} & \cdots & 0 & & & W_{v_p} + W_{\tilde{x}_p} & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & -W_{\tilde{x}_r} & & & 0 & \cdots & W_{v_r} + W_{\tilde{x}_r} & & & \\ \hline & & & 0 & & & & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & & & & 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

优化指标函数的梯度为

$$\boldsymbol{\lambda} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \bar{\xi}_d(k) \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \quad (20)$$

所有等式和不等式约束可以重构合成为 $\mathbf{d} \leq \mathbf{S} \boldsymbol{\varphi} \leq \mathbf{u}$ 的形式其中 \mathbf{S} 矩阵为 $[\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3 \quad \mathbf{S}_4 \quad \mathbf{S}_5 \quad \mathbf{S}_6]^T$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ A_l(k) & -\mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & B_l(k) & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & A_l(k) & -\mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 & B_l(k) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{I} & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & C_l(k) & \cdots & 0 & -\mathbf{I} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \cdots & C_l(k) & 0 & \cdots & -\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & & & \\ & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & 0 & & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & & \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \cdots & 0 & & & \\ & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \mathbf{I} & & & \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

$$\mathbf{S}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ & 0 & \cdots & \mathbf{I} & & \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

其中 I 为维度和 $A_i(k)$ 维度相同的单位矩阵。

d 向量为 $[d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]^T$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= [-\xi(k) \ -\omega(k) \ \cdots \ -\omega(k)]^T \\
 d_2 &= [-\omega_o(k) \ \cdots \ -\omega_o(k)]^T \\
 d_3 &= [\tau(k) \ \Delta\tau_{\min} \ \cdots \ \Delta\tau_{\min}]^T \\
 d_4 &= [\xi_{\min} \ \cdots \ \xi_{\min}]^T \\
 d_5 &= [\tau_{\min} \ \cdots \ \tau_{\min}]^T \\
 d_6 &= [P_{\min} \ \cdots \ P_{\min}]^T
 \end{aligned} \tag{26}$$

u 向量为 $[u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= [-\xi(k) \ -\omega(k) \ \cdots \ -\omega(k)]^T \\
 u_2 &= [-\omega_o(k) \ \cdots \ -\omega_o(k)]^T \\
 u_3 &= [\tau(k) \ \Delta\tau_{\max} \ \cdots \ \Delta\tau_{\max}]^T \\
 u_4 &= [\xi_{\max} \ \cdots \ \xi_{\max}]^T \\
 u_5 &= [\tau_{\max} \ \cdots \ \tau_{\max}]^T \\
 u_6 &= [P_{\max} \ \cdots \ P_{\max}]^T
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\Delta\tau_{\max}$ 和 $\Delta\tau_{\min}$ 分别为输入力矩增量的上限和下限； ξ_{\max} 和 ξ_{\min} 分别为状态向量的上限和下限； τ_{\max} 和 τ_{\min} 分别为输入力矩的上限和下限； P_{\max} 和 P_{\min} 分别为末端坐标向量的上限和下限。

对二次规划问题式(17)求解得到最优的 φ ，从中取出 $\tau(k+1|k)$ 项作为系统的控制量控制机械臂运动。

3 实验验证

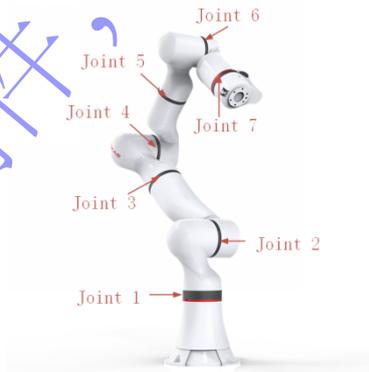


图3 珞石 xMate ER3Pro 机械臂

Fig.3 ROKAE xMate ER3Pro Robot

为验证该控制方法的可行性和控制效果，本文在珞石 xMate ER3Pro 机械臂上进行算法的验证。机械臂实物如图3所示，该机械臂有七个轴，每个轴都安装有力矩传感器。采集到每个轴的力矩后使用动力学模型补偿重力和摩擦力，后得到机械臂与环境交互的关节力矩，再使用雅克比矩阵映射得到机械臂末端的六维力/力矩。机械臂控制程序使用 C++编写，在安装实时内核的 Linux 系统上运行。上位机和机械臂控制器通过 TCP/IP socket 通讯，通讯频率为 1000Hz，机械臂控制器的控制周期为 1ms。

3.1 轨迹跟踪精度验证

机械臂初始关节角度为 $\theta_1=0$, $\theta_2=0$, $\theta_3=-1$, $\theta_4=\frac{\pi}{2}$, $\theta_5=\frac{\pi}{2}$, $\theta_6=1$, $\theta_7=0$ 单位为弧度。控制机械臂 2 轴和 5 轴运动进行轨迹跟踪实验。

设计 2 轴轨迹为 $\theta_2 = \sin(\frac{2}{5}\pi(t-\frac{5}{4}))$, 5 轴轨迹为 $\theta_5 = -\sin(\frac{2}{5}\pi(t-\frac{5}{4}))$ 。在选择模型预测权值 $W_{\dot{q}}$ 、 W_r 和 W_{vp} 时主要考虑它们的相对大小。 $W_{\dot{q}}$ 和 W_r 的差值越大, 模型预测控制器输出的控制力矩 τ 的最大变化率越大, 机械臂响应越快, 但变化率过快会导致机械臂输入功率超限, 且由于实际编程中浮点数精度限制, 差值不能过大。综合考虑以上因素, 并经过实验验证, 确定二者差值在 7 到 10 个量级最优。为了保证实际轨迹不超出模型预测的约束范围, 需要优先保证实际轨迹跟踪虚拟状态, $W_{\dot{q}}$ 应该比 W_{vp} 设置得更大。机械臂 2 轴比 5 轴需要带动的质量更大, 需要更大的力矩 τ 。故 $W_{\dot{q}}$ 和 W_{vp} 中对应 2 轴的两项权重比对应 5 轴的两项权重大 2 到 3 个量级最优。根据实验结果, 按以上原则调节权值大小得到模型预测控制器的权值为 $W_{\dot{q}} = \text{diag}(1 \times 10^8, 8 \times 10^7, 5 \times 10^5, 3 \times 10^5)$, $W_r = \text{diag}(0.02, 0.02)$, $W_{vp} = \text{diag}(8 \times 10^7, 4 \times 10^7, 8 \times 10^4, 3 \times 10^4)$, $W_{\dot{q}} = W_{\dot{q}}$, $W_{vt} = W_{vp}$ 。预测时域 N_p 为 50ms。

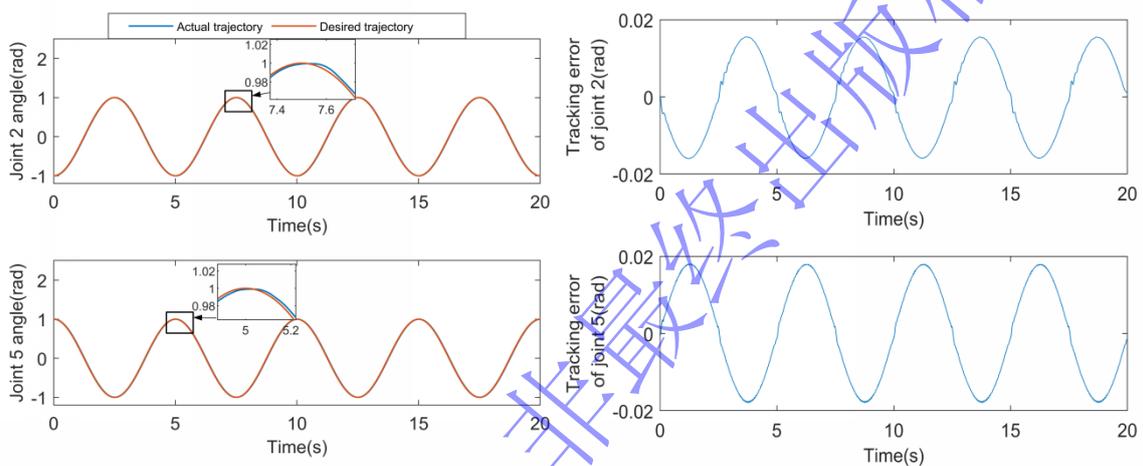


图 4 三环 PID 控制轨迹跟踪

Fig.4 Three-loop PID controls trajectory tracking

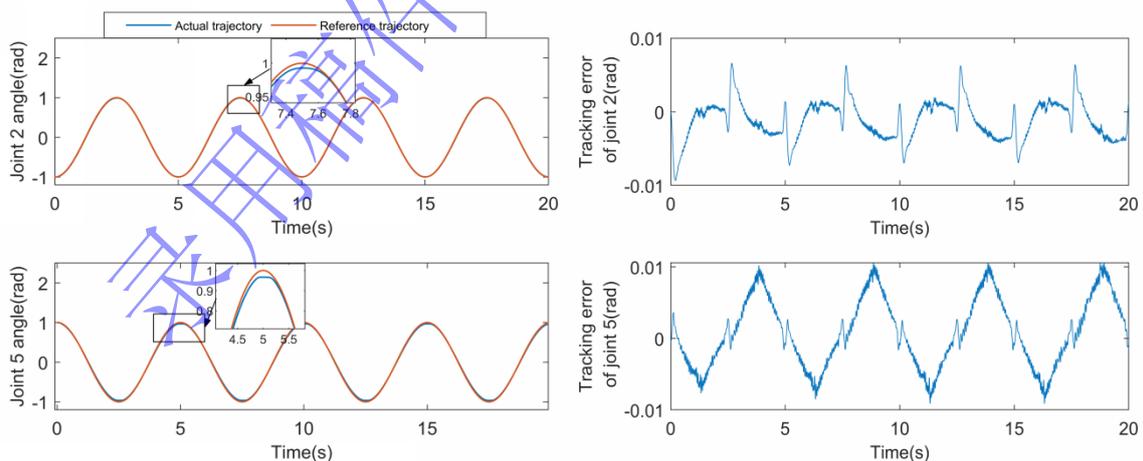


图 5 模型预测控制轨迹跟踪

Fig.5 Model predictive control trajectory tracking

图 4 为三环 PID 控制对轨迹的跟踪情况, 图 5 为采用本文的模型预测算法对轨迹的跟踪情况。由图可知模型预测和三环 PID 控制都能将跟踪误差控制在较小的值, 三环 PID 控制跟踪误差在 ± 0.02 弧度范围内, 模型预测控制跟踪误差在 ± 0.01 弧度范围内。从跟踪情况的局部放大图来看, 三

环 PID 控制的实际跟踪轨迹相比参考轨迹有一定延迟，模型预测控制在关节运动反向时没有明显的跟踪延迟。由于闭环系统控制的时滞效应，三环 PID 控制固有的跟踪延迟问题无法通过调参解决，从而限制了使用三环 PID 进行轨迹跟踪的精度上限，而模型预测控制通过将机械臂动力学模型加入反馈控制系统，预估出被控对象的未来轨迹，提早进行控制量补偿，使控制器提前动作，增加了系统的动态响应速度。

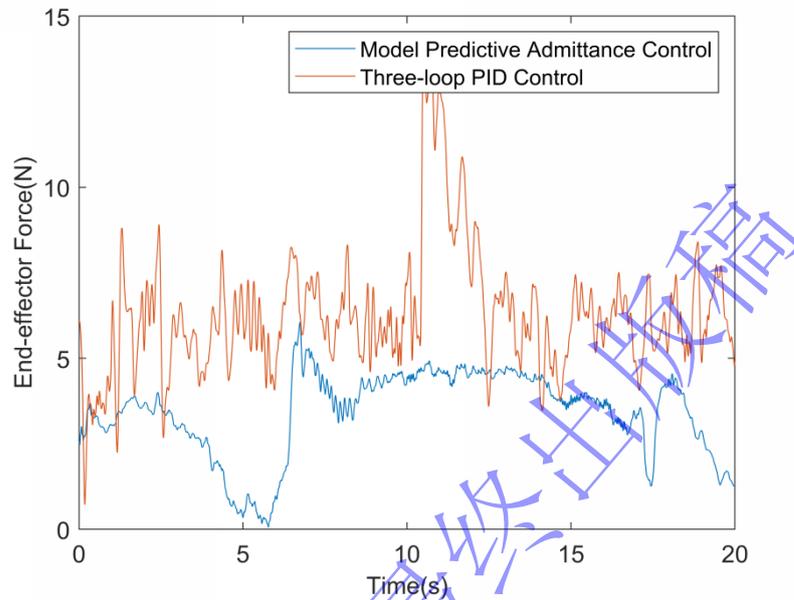


图6 模型预测导纳控制器和三环PID控制器与人交互力对比

Fig.6 Comparison of the interaction force between the Model Prediction Admittance Controller and the Three-loop PID controller

此外，有着更高的轨迹跟踪精度的控制策略可以更快的实现期望的导纳特性，达到更好的柔顺效果。图6给出了在容许误差内，相同拖动轨迹下分别使用三环PID控制器和模型预测控制器做底层轨迹跟踪器时，与人手交互力的变化。使用三环PID控制器的平均交互力大小为6.286N，大于使用模型预测控制器的平均交互力为3.418N。更小的交互力带来更柔顺的拖动效果，因此，利用本文设计的模型预测导纳控制作为底层位置跟踪控制器，可以有效提高机械臂柔顺性。

3.2 安全范围约束验证

按照3.1节的参数，配置模型预测控制器，运行本文设计的模型预测导纳控制程序。在进行2.2节的步骤时需要用到机械臂的逆运动学，本实验使用MDH方法进行运动学建模，D-H参数如表1所示。

表1 D-H参数表

Table 1 D-H parameter table

Link	a(mm)	α (rad)	d(mm)	θ (rad)
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	341.5	0
2	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
3	0	$-\frac{\pi}{2}$	394.0	0
4	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
5	0	$-\frac{\pi}{2}$	366.0	0

6	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
7	0	0	250.3	0

在模型预测控制器里设定机械臂末端位置约束为 $P_{\max} = [+∞, +∞]^T$, $P_{\min} = [0.45, -0.1]^T$ 。人手拖着机械臂末端运动。图 7 为机械臂末端轨迹图。可以看出机械臂末端位置在坐标系 x 轴被约束在大于 0.45 的范围内, 在 y 轴被约束在大于 -0.1 的范围内。实验结果验证了模型预测导纳控制器有主动约束效果。实验可以看出, 在触及约束边界时存在一定的波动, 部分实际轨迹会超出约束边界, 这是由预测时域较短和预测模型不够准确造成的, 但超出距离在 0.002 米以内满足安全要求。

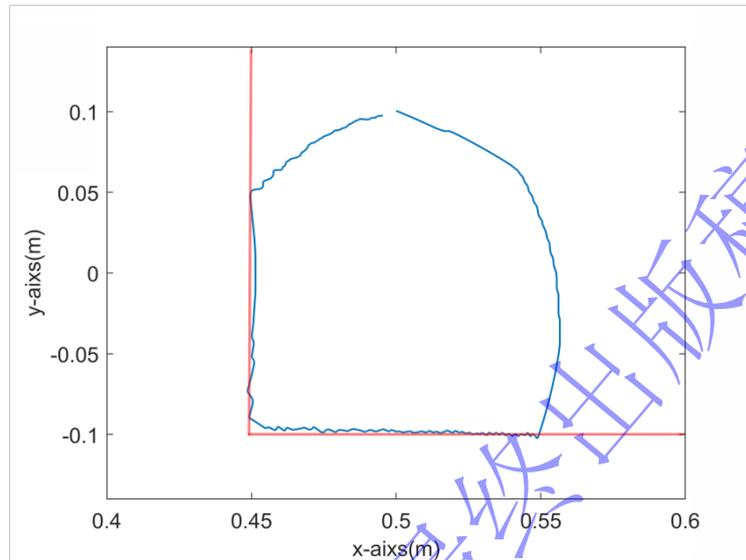


图 7 预测控制器设置位置约束情况下机械臂末端轨迹

Fig.7 Manipulator End-Effector Trajectory with Model Predictive Controller under Position Constraints

4 结论

为了增加半主动膝关节置换手术机器人自由区域拖动的柔顺性, 同时实现手术机器人运行在安全约束范围内, 本文创新的提出了利用模型预测控制作为底层位置跟踪器, 提高了系统的动态响应速度和人机协作的柔顺性。通过设计实验, 与使用三环 PID 控制作为底层位置跟踪器的方法进行对比, 验证了模型预测控制能实现更精确实时的轨迹跟踪, 并且满足了所需的导纳特性, 使拖动更加柔顺。此外, 还通过设计实验验证了模型预测控制器的主动约束能力, 提升了手术的安全性。

参考文献

- [1] Bian Y Y, Cheng K Y, Chang X, et al. Preliminary Statistics and Analysis of the Volume of Total Hip and Knee Arthroplasty Surgeries in China from 2011 to 2019. Chinese Journal of Orthopaedics, 2020, 40(21): 1453-60.
(边焱焱, 程开源, 常晓, 等. 2011 至 2019 年中国人工髋膝关节置换手术量的初步统计与分析. 中华骨科杂志, 2020, 40(21): 1453-60.)
- [2] Bozic K, Kurtz S M, Lau E, et al. The Epidemiology of Revision Total Knee Arthroplasty in the United States. The Journal of Arthroplasty, 2009, 24(2).
- [3] Nawabi D H, Conditt M A, Ranawat A S, et al. Haptically guided robotic technology in total hip arthroplasty: A cadaveric investigation. Proc Inst Mech Eng Part H-J Eng Med, 2013, 227(H3): 302-9.
- [4] Bargar W L, Bauer A, Borner M. Primary and revision total hip replacement using the Robodoc system. Clinical orthopaedics and related research, 1998, (354): 82-91.
- [5] Huang H F, Liu P S, Li Q, et al. Review: Intelligent control and human-robot interaction for collaborative robots. Chinese Journal of Engineering, 2022, 44(04): 780-91.

- (黄海丰, 刘培森, 李擎,等. 协作机器人智能控制与人机交互研究综述. 工程科学学报, 2022, 44(04): 780-91.)
- [6] Liu Y, Guo S, Yin Y, et al. Design and Compliant Control of a Piggyback Transfer Robot. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2021, 14(3).
- [7] Zhang S H, Zhu Q G, Wu J, et al. Design and Compliance Control of Rehabilitation Exoskeleton for Elbow Joint Ankylosis; proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Electr Network, F Jul 06-09, 2020. Ieee: NEW YORK, 2020.
- [8] Subramanian P, Wainwright T W, Bahadori S, et al. A review of the evolution of robotic-assisted total hip arthroplasty. *Hip International*, 2019, 29(3): 232-8.
- [9] Jacofsky D J, Allen M. Robotics in Arthroplasty: A Comprehensive Review. *The Journal of Arthroplasty*, 2016, 31(10): 2353-63.
- [10] Jung S, Yim S B, Hsia T C, et al. Experimental studies of neural network impedance force control for robot manipulators; proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, South Korea, F May 21-26, 2001. Ieee: NEW YORK, 2001.
- [11] Duchaine V, St-onge B M, Gao D L, et al. Stable and Intuitive Control of an Intelligent Assist Device. *IEEE Trans Haptics*, 2012, 5(2): 148-59.
- [12] Chen S Q, Li T M. Assembly of spacecraft components based on adaptive compliance control. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 2023, 63(11): 1808-19.
(陈书清, 李铁民. 基于自适应柔顺控制的航天器部件装配. 清华大学学报(自然科学版), 2023, 63(11): 1808-19.)
- [13] Li H Y, Nuradha T, Xavier S A, et al. Towards A Compliant and Accurate Cooperative Micromanipulator using Variable Admittance Control; proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics (ICARM), Natl Univ Singapore, Singapore, SINGAPORE, F Jul 18-20, 2018. Ieee: NEW YORK, 2018.
- [14] Yang J T, Sun T R, Cheng L, et al. Spatial Repetitive Impedance Learning Control for Robot-Assisted Rehabilitation. *Ieee-Asme Transactions on Mechatronics*, 2023, 28(3): 1280-90.
- [15] Xu G H, Wang Z P, Zhang J F, et al. Compliance Control of Deburring Robots based on Force Impedance; proceedings of the Chinese Automation Congress (CAC), Shanghai, PEOPLES R CHINA, F Nov 06-08, 2020. Ieee: NEW YORK, 2020.
- [16] Jiao C T, Zhang L, Su X J, et al. Task-Based Compliance Control for Bottle Screw Manipulation With a Dual-Arm Robot. *Ieee Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(2): 1823-31.
- [17] Ning G C, Liang H Y, Zhang X R, et al. Inverse-Reinforcement-Learning-Based Robotic Ultrasound Active Compliance Control in Uncertain Environments. *Ieee Transactions on Industrial Electronics*, 2024, 71(2): 1686-96.
- [18] Chen G, Huang Z Y, Jiang T, et al. Force distribution and compliance control strategy for stable grasping of multi-arm space robot. *Control and Decision*, 2024, 39(01): 112-20.
(陈钢, 黄泽远, 江涛,等. 多臂空间机器人稳定抓取力分配和柔顺控制策略. 控制与决策, 2024, 39(01): 112-20.)
- [19] Wang X S, Wang Y B, Li Y, et al. Position-based Impedance Control of a Multi-DOF Arm by Using Nolinear Proportional-differential Operation. *Science Technology and Engineering*, 2023, 23(24): 10410-8.
(王旭升, 王荣博, 李洋,等. 基于位置控制的多自由度机械臂非线性比例-微分阻抗控制. 科学技术与工程, 2023, 23(24): 10410-8.)
- [20] Ning X, Wu Y F. Model predictive control for trajectory tracking of free-floating space robot. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(05): 687-96.
(宁昕, 武耀发. 自由漂浮空间机器人轨迹跟踪的模型预测控制. 控制理论与应用, 2019, 36(05): 687-96.)
- [21] Yan Y B, Ye G, Xu X W, et al. Yaw control for motor-wheel vehicle based on model predictive control. *Journal of Wuhan University of Science and Technology*, 2018, 41(03): 226-31.
(严运兵, 叶刚, 许小伟,等. 基于模型预测控制的电动轮车辆横摆控制. 武汉科技大学学报, 2018, 41(03): 226-31.)
- [22] Bhardwaj M, Sundaralingam B, Mousavian A, et al. STORM: An Integrated Framework for Fast Joint-Space Model-Predictive Control for Reactive Manipulation //ALEKSANDRA F, DAVID H, GERHARD N. Proceedings of the 5th

- Conference on Robot Learning. Proceedings of Machine Learning Research; PMLR. 2022: 750--9.
- [23] Li Y K, Hao X L, She Y C, et al. Constrained motion planning of free-float dual-arm space manipulator via deep reinforcement learning. *Aerospace Sci Technol*, 2021, 109: 13.
- [24] Li W, Xiong R. Dynamical Obstacle Avoidance of Task-Constrained Mobile Manipulation Using Model Predictive Control. *Ieee Access*, 2019, 7: 88301-11.
- [25] Sciacivico L, Siciliano B, Villani L, et al. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. London: Springer, 2009.
- [26] Wang Y F, Sun F C, Zhang Y A, et al. Suboptimal model predictive control for nonlinear system on tracking problem. *Control and Decision*, 2009, 24(11): 1682-7.
(王亚锋, 孙富春, 张友安, 等. 一种跟踪问题中的次优非线性预测控制算法. *控制与决策*, 2009, 24(11): 1682-7.)
- [27] Lu H, Wang H B, Feng Y F. Human-machine Coupling Dynamics Modeling and Active Compliance Control of Lower Limb Rehabilitation Robot. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(07): 32-43.
(卢浩, 王洪波, 冯永飞. 下肢康复机器人人机耦合动力学建模和主动柔顺控制. *机械工程学报*, 2022, 58(07): 32-43.)
- [28] Ren J C, Li J C, Wang P J, et al. Obstacle avoidance of a seven-joint manipulator based on double interpolation trajectory control. *Chinese Journal of Engineering*, 2023, 45(12): 2085-94.
(任金超, 李佳昌, 王平江, 等. 基于双插补轨迹控制的七关节机械臂避障. *工程科学学报*, 2023, 45(12): 2085-94.)
- [29] Zong L J, Luo J J, Wang M M, et al. A Mixed Integer Predictive Controller with Multi-Constraint for Free-Floating Space Robots. *Journal of Astronautics*, 2016, 37(08): 992-1000.
(宗立军, 罗建军, 王明明, 等. 自由漂浮空间机器人多约束混合整数预测控制. *宇航学报*, 2016, 37(08): 992-1000.)
- [30] Alvarado I, Limon D, Alamo T, et al. Output feedback Robust tube based MPC for tracking of piece-wise constant references; proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, F Dec 12-14, 2007. Ieee: NEW YORK, 2007.
- [31] Spellucci P. An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems. *Mathematical Programming*, 1998, 82(3): 413-48.